ЗМІСТ

Вступ

Приступаючи до вивчення фізики, необхідно уяснити, що фізика поряд з іншими природничими науками, вивчає об'єктивні властивості оточуючого нас матеріального світу. Вона досліджує найбільш загальні форми руху матерії і їх взаємні перетворення.. Рух є форма існування матерії. Фізичні поняття є найпростішими і в той же час вирішальними і узагальненими в природознавстві (простір, час, рух, маса, енергія та ін.).

Основними задачами курсу фізики в вузах є:

1.Створення основ теоретичної підготовки в області фізики, що дозволить майбутнім інженерам орієнтуватися в потоці наукової і технічної інформації і забезпечити можливість використання нових фізичних принципів в тих галузях техніки, в яких вони спеціалізуються.

2.Формування наукового мислення, правильного розуміння меж застосування різних фізичних понять, законів, теорій та уміння оцінювати ступінь достовірності результатів, одержаних за допомогою експериментальних або математичних методів дослідження.

3.Засвоєння основних фізичних явищ і законів класичної і сучасної фізики, методів фізичного дослідження.

4.Надбання прийомів і навичок розв'язання конкретних задач з різних областей фізики, які знадобляться в подальшому рішенні інженерних задач.

Мета даного методичного посібника – допомогти студентам технічного вузу очної форми навчання не тільки придбати теоретичні знання з загального курсу фізики, а і застосовувати їх в конкретних випадках при розв'язанні задач. Але, як показує досвід, саме розв'язання задач визиває найбільші труднощі у вивчаючих фізику, бо формального знання законів фізики для цього недостатньо. В деяких випадках необхідно знання спеціальних методів, прийомів, які є загальними для розв'язання певних груп задач. В інших випадках, крім знання теорії, необхідно мати здібність аналітично мислити.

Він включає два розділи фізики: «Основи класичної механіки» та «Молекулярна фізика і основи термодинаміки» і є першою частиною навчального посібника до практичних занять з дисципліни «Фізика» для студентів всіх спеціальностей технічного вузу. До кожної теми надано основні поняття та формули, методичні вказівки до розв'язання здач даної теми, приклади розв'язання задач різного типу, їх аналіз, а також задачі для самостійної роботи для надбання і закріплення навичок розв'язування студентами фізичних задач, без чого неможливе повноцінне засвоєння дисципліни «Фізика». До кожної теми приведені контрольні запитання.

Цей посібник буде корисним при проведенні практичних занять з дисципліни «Фізика», самостійної роботи студентів, їх підготовки до модульних контрольних робіт.

1 **ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ**

1.1 Кінематика матеріальної точки і поступального руху твердого тіла

Основні поняття і формули

Основна задача механіки з математичної точки зору зводиться до знаходження певних функцій.

а) при координатному способі задавання положення точки в просторі

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\ ,$$

де x,y,z – координати матеріальної точки в будь-який момент часу;

б) при векторному способі –

$$\vec{r}=\vec{r}(t)\ ,$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор матеріальної точки в будь-який момент часу;

в) при природному способі

$$S=S(t),$$

де S – пройдений матеріальною точкою шлях;

г) при рухові по колу

$$\varphi=\varphi(t)\ .$$

Середня швидкість матеріальної точки:

$$\langle \upsilon_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t};\ \langle \upsilon_y \rangle = \frac{\Delta y}{\Delta t};\ \langle \upsilon_z \rangle = \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\ ;\ \langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

де $\Delta\vec{r}$ - елементарне переміщення точки за проміжок часу Δt ;

$\vec{r}$ - радіус-вектор точки;

Δs - шлях, що пройшла точка за проміжок часу Δt.

Миттєва швидкість:

Відповідно до способу задавання рівняння руху швидкість руху визначається за відповідними формулами:

Компоненти вектора швидкості:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} \;. \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt}.$$

вектор швидкості

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

величина швидкості

$$\upsilon = \frac{dS}{dt}.$$

Середнє прискорення матеріальної точки відповідно до способу розв’зання основної задачі механіки:

-координатний

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t}, \qquad \langle a_y \rangle = \frac{\Delta \upsilon_y}{\Delta t}, \qquad \langle a_z \rangle = \frac{\Delta \upsilon_z}{\Delta t};$$

-векторний

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} \qquad ;$$

-природний

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \qquad .$$

Компоненти вектора прискорення:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Вектор прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Величина прискорення

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Швидкість в будь-який момент часу визначається рівнянням

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \int_t^{t_2} \vec{a}(t)dt$$

Кінематичні рівняння руху відповідно до способу описування руху:
–в координатному

$$X = X_0 + \int_{t_1}^{t_2} \upsilon_x dt\,, \; Y = Y_0 + \int_{t_1}^{t_2} \upsilon_y dt\,, \;\; Z = Z_0 + \int_{t_1}^{t_2} \upsilon_z dt\,.$$

–в векторному

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\upsilon}(t)dt\,.$$

–в природному

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt\,.$$

В залежності від зміни швидкості рух може бути рівномірним, нерівномірним, рівнозмінним:

$\upsilon = const$ - рівномірний рух;
$\upsilon \neq const$ - змінний рух;
$a = const$ - рівнозмінний рух;

Рівняння рівномірного руху відповідно до способу описування руху мають вигляд:

$$x = x_0 + \upsilon_x t\,.\; y = y_0 + \upsilon_y t\,,\; z = z_0 + \upsilon_z t\,.$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}t\,.$$

$$s = \upsilon t.$$

Рівняння рівнозмінного руху відповідно до способу описування руху:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},\ y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2},\ z = z_0 + \upsilon_{0z} t + \frac{a_z t^2}{2}.$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t,\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t,\ \upsilon_z = \upsilon_{0z} + a_z t.$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2},$$

де $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a} t$

$$s = \upsilon_0 t \pm \frac{a t^2}{2}.$$

де υ_0 - початкова швидкість,

a - прискорення.

Зв'язок між векторним і координатним способами задавання рівняння руху:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}.$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні орти вздовж координатних осей.

Модуль радіус-вектора дорівнює:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Модуль вектора швидкості:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^{\ 2} + \upsilon_y^{\ 2} + \upsilon_z^{\ 2}}.$$

Модуль прискорення:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ .$$

При криволінійному русі змінюються величина і напрямок швидкості. Тому вектор прискорення має дві складові - тангенціальну та нормальну:

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}$$ – тангенціальне прискорення,

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$$ - нормальне прискорення,

де $\frac{d\upsilon}{dt}$ - похідна модуля швидкості за часом,

R - радіус кривизни траєкторії в даній точці,

$\vec{\tau},\vec{n}$ - одиничні вектори вздовж дотичної та нормалі до траєкторії.

Повне прискорення:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\ ,$$

Модуль прискорення дорівнює:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Методичні вказівки і приклади розв'язання задач з кінематики поступального руху матеріальної точки і твердого тіла.

При вивченні кінематики поступального руху основна задача полягає в знаходженні фізичних величин, які характеризують механічний стан тіла у просторі та його зміну з часом. Механічний стан тіла визначається такими фізичними величинами: радіус – вектором $\vec{r}$ та його модулем $|\vec{r}|$; швидкістю $\vec{\upsilon}$, прискоренням $\vec{a}$ та їх модулями $|\vec{\upsilon}|$ і $|\vec{a}|$; шляхом s, що проходить тіло; нормальною a_n та тангенціальною a_τ складовими прискорення; радіусом кривизни траєкторії R.

Задачі з кінематики умовно можна розділити на два типи:

-- задачі на закріплення теоретичного матеріалу

-- задачі на дослідження.

За типом руху в кінематиці розглядаються задачі на

-- прямолінійний рівномірний рух і додавання швидкостей;

-- нерівномірний рух,;

-- обертальний рух твердого тіла.

1.Для розв'язання задач з кінематики необхідно знати закон руху матеріальної точки, що визначає її положення в будь-який момент часу.

2. Розв'язання задач на рівномірний прямолінійний рух кількох тіл відносно системи відліку, яка пов'язана з Землею, або з іншою системою відліку, спорощується, якщо розглядати усі рухи в системі відліку пов'язанною з одним із рухомих тіл. При цьому треба мати на увазі, що якщо тіло 1 рухається відносно тіла 2 з швидкістю $\vec{\upsilon}_1$, то, як відомо з теорії відносності, тіло 2 рухається відносно тіла 1 із швидкістю

$$\vec{\upsilon}_2 = -\vec{\upsilon}_1 .$$

3. Якщо матеріальна точка бере участь в двох незалежних рухах, то її переміщення дорівнює векторній сумі переміщень. що відбулися в кожному русі, незалежно від того послідовно чи одночасно відбувалися ці рухи:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 .$$

В даному випадку швидкість точки в складному русі дорівнює векторній сумі її швидкостей в окремих рухах:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 .$$

Розв'язування задач кінематики поступального руху мають деякі особливості. Умовно фізичні задачі можна розділити на такі види:
-- задачі, які потребують знань основних понять і законів кінематики;
-- задачі, які потребують дослідження і фізичного розв'язання.

Розглянемо декілька прикладів розв'язання задач взятих в основному із збірника задач для студентів технічних вузів.

Приклад 1.1. Рух матеріальної точки задається радіусом-вектором у вигляді:

$$\vec{r} = \vec{i} A\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t ,$$

де А, В і ω – сталі величини.

Визначити вектори швидкості та прискорення, їх модулі, тангенціальну та нормальну складові прискорення і радіус кривизни траєкторії, як функцію часу. Який вигляд має траєкторія руху?

Розв'язання. З умови задачі зрозуміло, що рух матеріальної точки відбувається в площині і заданий векторним способом. Рівняння радіус-вектора задано у векторному вигляді. З рівняння радіус-вектора маємо:

$$x = A\cos\omega t , \;\; y = B\sin\omega t .$$

Вектор швидкості має вигляд

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} .$$

Диференціюючи x і y за часом визначаємо компоненти швидкості

$$\upsilon_x = -A\omega \sin \omega t , \quad \upsilon_y = B\omega \cos \omega t .$$

Знаходимо вектор швидкості та його модуль:

$$\vec{\upsilon} = \omega(-\vec{i} A \sin \omega t + \vec{j} B \cos \omega t) ;$$

$$\upsilon = \omega \sqrt{A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t} .$$

Диференціюючи υ_x і υ_y за часом, визначаємо компоненти вектора прискорення

$$a_x = -A\omega^2 \cos \omega t , \quad a_y = -B\omega^2 \sin \omega t .$$

Визначимо вектор прискорення та його модуль:

$$\vec{a} = -\omega^2 (\vec{i} As \cos \omega t + \vec{j} B \sin \omega t) .$$

$$a = \omega^2 \sqrt{A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \sin^2 \omega t} .$$

Знаходимо диференціал модуля швидкості за часом і визначаємо тангенціальне прискорення

$$a_\tau = \frac{\omega^2 (A^2 + B^2) \sin 2\omega t}{2\sqrt{A^2 \sin \omega t + B^2 \cos \omega t}} .$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a^2{}_\tau} = \frac{\omega^2 AB}{\sqrt{A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t}} .$$

З формули нормального прискорення визначаємо радіус кривизни траєкторії:

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{(A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t)^{3/2}}{AB} .$$

Щоб одержати рівняння траєкторії руху матеріальної точки, треба знайти залежність між координатами x і y, тобто звільнитися від параметра t.

Отже:

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t\,, \quad \frac{y}{B} = \sin \omega t\,.$$

Піднесемо обидві частини цих співвідношень до квадрата і складемо:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

тобто траєкторія руху матеріальної точки – еліпс з півосями A і B.

Приклад 1.2. Рух матеріальної точки заданий рівняннями: $x = 5 + 4t + 2t^2 м$, $y = 6t$ м. Визначити швидкість та прискорення руху через t=1c після початку руху. Отримати рівняння траєкторії руху в явному вигляді та побудувати її графічно, витримуючи масштаб.

Розв'язання. З постановки задачі зрозуміло, що рух матеріальної точки відбувається в площині і заданий координатним способом вивчення руху. Вектор швидкості може бути представлений або координатами - $\vec{V}(V_x, V_y)$, або модулем та кутом нахилу до осі Ox - $\vec{V}(V, \alpha)$.

Визначимо проекції швидкості на осі OX і OY:

$$\upsilon_x = 4 + 4t \text{ м/с}, \quad \upsilon_y = 6 \text{ м/с}.$$

Модуль швидкості визначається за формулою:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_x + \upsilon^2{}_y}\text{ , і дорівнює } \upsilon = \sqrt{(4 + 4t)^2 + 6^2}\,.$$

Через час t = 1 с швидкість дорівнює:

$$\upsilon = \sqrt{(4 + 4 \cdot 1)^2 + 6^2} = 10 \text{ (м/с)}.$$

Кут нахилу вектора швидкості до осі Ox:

$$\alpha(t) = arctg \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = arctg \frac{2}{3}(1 + t).$$

Через час t = 1 с кут нахилу вектора швидкості до осі Ox дорівнює:

$$\alpha = 53^\circ 8'.$$

Вектор прискорення також може бути представлений або координатами $\vec{a}(a_x, a_y)$. або модулем та кутом нахилу до осі Ох $\vec{a}(a, \beta)$.

Знаходимо проекції вектора прискорення на осі координат за формулою

$$a_x = 4 \text{ м/с}^2;\ a_y = 0.$$

Модуль прискорення визначається згідно формули

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

і дорівнює:

$$a = \sqrt{4^2 + 0} = 4 \left(м / c^2 \right).$$

Кут нахилу вектора прискорення до осі х

$$\beta(t) = arctg \frac{a_y}{a_x} = arctg 0; \quad \alpha = 0^\circ,$$

тобто прискорення заданого руху визначається його складовою вздовж осі Ох і співпадає з її позитивним напрямком.

Щоб отримати рівняння траєкторії руху точки в явному вигляді, необхідно позбутися параметра t в рівняннях для проекцій х і у. Виразимо t через у і підставимо в рівняння для координати х:

$$t = \frac{y}{6};$$

$$x = 5 + \frac{2}{3} y + \frac{1}{18} y^2 .$$

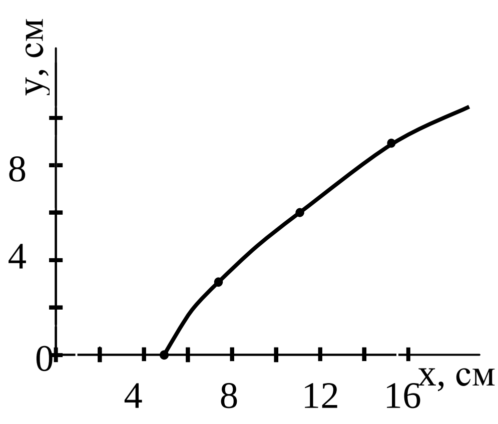


Рисунок 1.1

Отримане рівняння є рівнянням параболи з вершиною в точці (5,0).

Теоретично гілки параболи симетричні відносно осі Ох, але за фізичним змістом досліджується час руху, а не час, який передував початку руху. Тому рух відбувається тільки для позитивних значень координати у.

Траєкторія руху зображена на рис.1.1.

Приклад 1.3. Рух матеріальної точки заданий рівнянням: $S = 2t + 3t^2$ *м.* Визначити характер руху та знайти пройдений шлях, швидкість і прискорення руху через час t=2 с після початку руху.

Розв'язання. Рух матеріальної точки заданий природнім способом вивчення руху.

Визначимо швидкість руху матеріальної точки:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = 2 + 6t \text{ (м/с)}.$$

Прискорення дорівнює:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Прискорення *a* постійне, отже рух точки є рівноприскореним.

Шлях і швидкість через 2 с дорівнюють:

$$s=2\cdot 2+3\cdot 2^2=18 \text{ (м)},$$

$$\upsilon = 2 + 6 \cdot 2 = 14 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь: s = 18 м, $\upsilon = 14$ м/с.

Приклад 1.4. Матеріальна точка рухається із швидкістю $\upsilon_x = 2 + 3t$ м/с. Визначити характер руху, записати рівняння руху, якщо точка мала початкову координату x_0 = 0,5 м, а також положення точки, пройдений шлях, швидкість і прискорення її руху через час t = 2 с після початку руху.

Розв'язання. Згідно умови задачі, рух матеріальної точки заданий координатним способом вивчення руху. З аналізу рівняння швидкості випливає, що рух рівноприскорений в додатному напрямку осі Ох з початковою швидкістю v_0 = 2 м/с і прискоренням a_x = 3 м/с.

Рівняння руху виражає залежність координати x від часу і має вигляд

$$x = x_0 + \int_0^t v_x dt .$$

Тоді:

$$x = x_0 + \int_0^t (2+3t)dt \ .$$

Виконавши інтегрування, одержимо:

$$x = 0{,}5 + 2t + 1{,}5t^2 \ (м).$$

Шлях, пройдений точкою дорівнює:

$$s = x - x_0.$$

Прискорення матеріальної точки визначається за формулою:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} .$$

Отже через t = 2 с координата точки дорівнює:

$$x = 0{,}5 + 2 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot 2^2 = 10{,}5 \, (\text{м})$$

Шлях, пройдений точкою за t = 2с:

$$s = 10{,}5 - 0{,}5 = 10 \, (\text{м}).$$

Швидкість точки через 2 с:

$$\upsilon_x = 2 + 3 \cdot 2 = 8 \ (\text{м/с})$$

Прискорення матеріальної точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(2+3t) = 3(м/c^2) .$$

Відповідь: $x = 10{,}5 м$, $x = 0{,}5 + 2t + 1{,}5t^2 \ м$, $s = 10 \ м$, $\upsilon_x = 8 \, м/c$,

$a_x = 3м/с^2$.

Приклад 1.5. Дві матеріальні точки рухаються прямолінійно, в напрямках. Які напрямлені під кутом 60°. Швидкості рухів відповідно дорівнюють: V_1 = 20 м/с, V_2 = 10 м/с. Визначити відносну швидкість руху матеріальних точок.

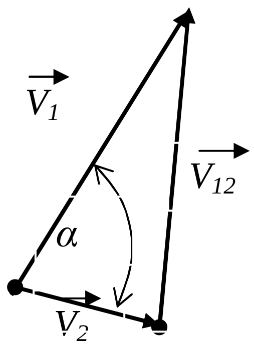


Рисунок 1.6

Розв'язання. В даній задачі необхідно скористатися векторним способом вивчення рухів. Виконаємо графічне зображення напрямків швидкостей та визначимо їх відносну швидкість V_{12}, наприклад, першої матеріальної точки відносно другої, як це показано на рис 1.6. Для знаходження чисельного значення відносної швидкості скористаємося теоремою косинусів:

$$V_{12} = \sqrt{V_1^2 + V_1^2 - 2V_1V_2\cos\alpha} .$$

Підставивши значення швидкостей, одержимо:

$$V_{12} = \sqrt{20^2 + 10^2 - 2\cdot 20\cdot 10\cdot \cos 60^0} = \sqrt{300} \approx 17{,}3(м/с) .$$

Відповідь: $V_{12} = 17{,}3$ м/с.

Приступаючи до розв'язування задач, що потребують попереднього аналізу, необхідно виходити з того, що порядок дослідження та розв'язок задач з фізики складається з наступних пунктів: 1) уважного вивчення умови задачі, 2) фізичного її розв'язку, 3) алгебраїчного розв'язку, 4) перевірки розмірностей, 5) арифметичного розв'язку і 6) запису відповіді.

Попереднє читання умови задачі можна вважати закінченим, якщо ви зрозуміли про рух якого тіла або яких тіл йде мова в задачі, чи є рухи тіл поступальними (даному пункті ми розглядаємо кінематику поступального руху) і чи ви можете графічно зобразити рух матеріальної точки або точок. На рисунку, як правило, зображається траєкторія руху, вказується прискорення (якщо воно є) в довільній точці траєкторії та початкова швидкість. Якщо використовується координатно векторний спосіб розв’язку задачі, то, після вказаних вище дій і запису векторних рівнянь руху або рухів тіл, необхідно вибрати відповідну систему координат для заміни векторних рівностей скалярними, проектуючи їх на відповідні осі координат.

Фізичний розв’язок задачі зводиться до ідентифікації характеру руху тіла (або тіл), вибору методу дослідження та запису відповідних рівнянь руху. Якщо кількість отриманих рівнянь повинна відповідати кількості невідомих.

Алгебраїчний розв’язок задачі закінчується отриманням розрахункової формули. Якщо кількість невідомих перевищує кількість рівнянь, то прочитавши уважно ще раз умову задачі, знайти допоміжні зв’язки між величинами або відомі їх значення.

Якщо отримана розрахункова формула, необхідно зробити перевірку розмірності. При цьому можна всі величини звести до однієї системи одиниць, або вивести розмірний коефіцієнт. Закінчується цей пункт отриманням одиниці вимірювання досліджуваної величини та отриманням впевненості в правильності розрахункової формули.

Арифметичне розв’язання - це підстановка чисельних значень заданих та табличних величин в розрахункову формулу та визначення чисельного значення досліджуваної величини. Підставляються тільки числові значення без вказування розмірностей величин. Тому поряд з отриманим чисельним значенням величини вказується в дужках її розмірність. Одержавши числову відповідь, оцініть її правдоподібність (така оцінка допоможе в ряді випадків знайти помилковість знайденого результату).

У відповіді записуються чисельні значення досліджуваних величин з їх розмірностями.

Приклад 1.6. Турист подолав деякий шлях S. Першу третину шляху він скористався велосипедом рухаючись із швидкістю V_1 = 20 км/г. Решту шляху турист половину часу йшов вгору зі швидкістю V_2 = 2 км/г, іншу половину часу він рухався під гору із швидкістю V_3 = 7км/г. Визначити середню швидкість руху туриста.

Розв’язання. Траєкторія руху туриста досить складна, Але відзначивши, що мова йде про величину пройденого шляху, використаємо природнім метод задавання руху.

Зобразимо схематично пройдений шлях деяким відрізком прямої лінії та вкажемо на ньому етапи руху туриста.

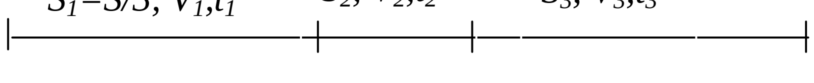


Рисунок 1.7

Рух туриста складний. Він складається з трьох ділянок рівномірного руху:

$$S_1=S/3=V_1t_1,\ S_2,\ S_3. \qquad (1.1)$$

З умови задачі відомо, що $S_2+S_3=2S/3$ та $t_2=t_3=t'$.

Цей шлях можна записати рівнянням:

$$S_2+S_3 = 2S/3 = V_2t_2+ V_3t_3= (V_2+ V_3)t'. \qquad (1.2)$$

За визначенням середня швидкість визначається за формулою

$$V_{cp}=S/t, \qquad (1.3)$$

де $t=t_1+2t'$.

З рівнянь (1.1),(1.2)виразимо час руху на ділянках S_1 і (S_2+S_3):

$$t_1=S/3V_1,\ t'=2S/3(V_2+V_3).$$

Підставимо одержані вирази в формулу (1.3):

$$V_{cp}=\frac{S}{\frac{S}{3V_1}+\frac{2S}{3(V_2+V_3)}}=\frac{3V_1(V_2+V_3)}{V_2+V_3+2V_1}.$$

Розмірність середньої швидкості:

$$[V_{cp}]=[V]=\frac{км}{г}.$$

Проведемо розрахунки:

$$V_{cp}=\frac{3\cdot 20(2+7)}{2+7+2\cdot 20}\approx 11\left(\frac{км}{г}\right).$$

Відповідь: $V_{cp}\approx 11 км/год.$

Приклад 1.7. Тіло кинуто вертикально вгору із швидкістю V_0 =5 м/с. В той самий момент, коли воно досягнуло максимальної точки підйому, кинули друге тіло з тією ж початковою швидкістю. Визначити висоту h над поверхнею землі, на якій тіла зустрінуться.

Розв'язання. До такого типу задач корисно застосувати координатно-векторний спосіб дослідження, поверхню землі за початок відліку, а за додатній напрямок осі Ох - напрямок руху тіл вертикально вгору. Рух тіл є рівнозмінним з прискоренням вільного падіння g=9,8 м/с.

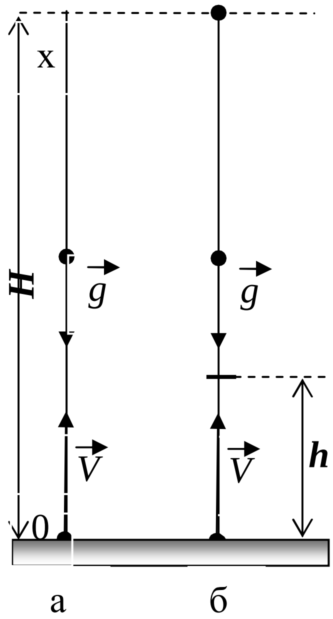


Рисунок 1.8

Рух першого тіла відбувається відповідно до рівнянь (див. рис. 1.8,а):

$$x = V_{0x}t - \frac{g_x t^2}{2}, \tag{1.4}$$

$$V_x = V_0 - g_x t. \tag{1.5}$$

На максимальній висоті руху точка має координату x=H і миттєву швидкість V_t=0.

Отже час руху до неї знаходиться з формули (1.5):

$$t = \frac{V_0}{g} \tag{1.6}$$

Підставивши в формулу (1.4) час руху (1.6),одержимо максимальну висоту підйому тіла

$$H = \frac{V^2}{g} - \frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{2g};.$$

Після підйому першого тіла до верхньої точки (див. рис. 1.8,б) рух здійснюють два тіла: перше тіло вільно падає з висоти Н без початкової швидкості, а друге виконує рух вертикально вгору з початковою швидкістю V_0 .

Тоді рівняння їх рухів мають відповідно наступний вигляд:

$$x_1 = H - \frac{gt^2}{2} = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} \qquad (1.7)$$

$$x_2 = V_0 t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.8)$$

Умовами зустрічі тіл є рівність часу їх руху та рівність координат:

$$x_1 = x_2 = h.$$

Підставивши в це рівняння відповідні вирази координат з рівнянь (1.7) і (1.8) отримаємо рівняння, з якого визначимо час руху тіл до зустрічі:

$$V_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}, \qquad (1.9)$$

$$t = \frac{V_0}{2g}.$$

Відповідно, підставивши отриманий вираз в рівняння (1.7), отримаємо:

$$h = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gV_0^2}{2 \cdot 4g^2} = \frac{3V_0^2}{8g}.$$

Перевіримо розмірність:

$$[h] = \frac{м^2 с^2}{с^2 м} = м.$$

Проведемо розрахунки:

$$h = \frac{3 \cdot 5^2}{8 \cdot 9{,}8} \approx 0{,}96(м).$$

Відповідь: h=0,96 м.

Приклад 1.8. Тіло кинуто з вежі висотою h=30 м під кутом $\alpha = 30°$ до горизонтальної поверхні із швидкістю V_0 =10 м/с. Визначити :

максимальну висоту H_{max} тіла над поверхнею землі. Через який час t та на якій відстані від вежі упаде тіло? Якою буде швидкість руху тіла в момент тангенціальну та нормальну складові прискорення руху тіла та радіус R кривизни траєкторії в момент t_1 = 2 с. Побудувати траєкторію руху.

Розв'язання. Скористуємося координатно-векторним способом дослідження, прийнявши точку кидання тіла за початок відліку. Напрямок осі Ох спрямуємо горизонтально, а осі Оу - вертикально вниз (див. рис.1.9). Тому що рух тіла поступальний, його вважаємо матеріальною точкою.

На рис. 1.9 вказані вектор початкової швидкості $\vec{V}_0$ та вектор прискорення руху $\vec{g}$, а також вектори нормального і тангенціального прискорень.

Рух тіла рівнозмінний. Відповідні рівняння руху мають вигляд:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}; \tag{1.10}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 t + \vec{g}t.$$

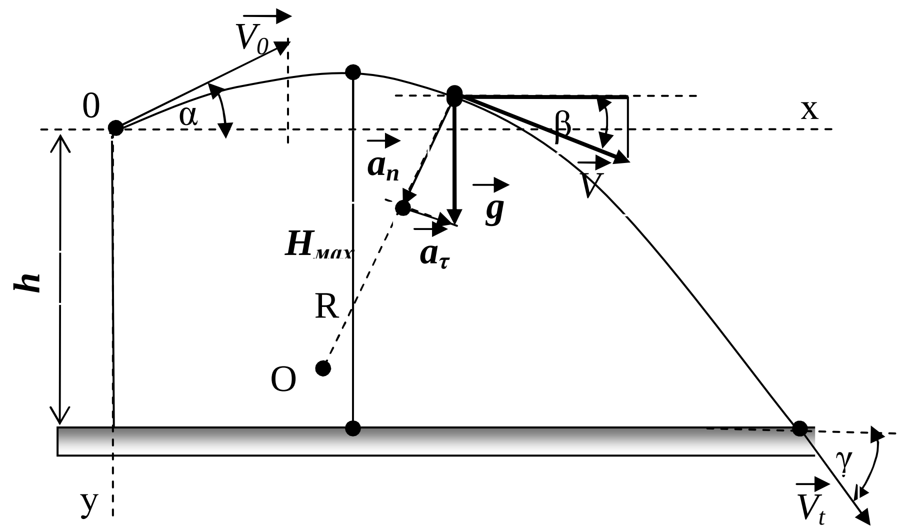


Рисунок 1.9

Для заміни векторних рівнянь скалярними вибираємо осі координат та початок відліку, як вказано на рис. 1.9. При такому виборі осей координат для початкового моменту часу маємо:

$$y_0 = 0;\ V_{0x} = V_0 cos\alpha;\ V_{0y} = -V_0 sin\alpha;\ g_x = 0;\ g_y = g.$$

Рівняння руху досліджуваного тіла в проекціях на осі координат мають такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&x = V_0 \cos\alpha \cdot t; \\
&V_x = V_0 \cos\alpha; \\
&y = -V_0 \sin\alpha \cdot t + \frac{gt^2}{2}; \\
&V_y = -V_0 \sin\alpha + gt.
\end{aligned}
\qquad (1.11)
$$

В системі рівнянь (11) є інформація про рух тіла в довільній точці траєкторії, але щоб дослідити положення тіла в заданий момент часу в даній точці траєкторії необхідно задати допоміжну інформацію. Наприклад, перше питання задачі відноситься до знаходження координати найвищої точки траєкторії, отже екстремальна точка відповідає умові

$$\frac{dy}{dt} = 0 .$$

З четвертого рівняння системи (11) маємо:

$$\frac{dy}{dt} = -V_0 \sin\alpha + gt_1 = 0 ,$$

звідки час дорівнює:

$$t_1 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g},$$

де t_1 - час руху тіла до максимальної точки підняття вздовж траєкторії.

Змінна висота тіла над поверхнею Землі дорівнює:

$$H = h - y.$$

В досліджуваній точці максимальна висота виражається рівнянням:

$$H_{max} = h - y_{min},$$

де координата y відраховується зверху вниз.

З третього рівняння системи (11) маємо:

$$H_{\max} = h + V_0 \sin\alpha t_1 - \frac{gt_1^2}{2},$$

$$H_{\max} = h + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Перевіримо одержану формулу розмірністю:

$$[H_{\max}] = \frac{м^2 c^2}{c^2 м} = м.$$

Виконаємо обчислювання:

$$H_{\max} = 30 + \frac{10^2 \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 9{,}8} \approx 31{,}2\ (м).$$

Друга група запитань даної задачі відноситься до точки падіння тіла на Землю. Для її дослідження до системи рівнянь (1.11) додаються умови, що конкретизують досліджувану точку в кінцевий момент часу:

$$y = h,\ x = S,\ V = V_t.$$

Перша з цих умов дає можливість розрахувати загальний час руху:

$$h = -V_0 \sin\alpha t + \frac{gt^2}{2};\ gt^2 - 2V_0 \sin\alpha t - 2h = 0,$$

$$t = \frac{V_0 \sin\alpha \pm \sqrt{(V_0 \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g}.$$

$$t = \frac{10\sin30^\circ \pm \sqrt{(10\sin30^\circ)^2 + 4 \cdot 9{,}8 \cdot 30}}{2 \cdot 9{,}8};.$$

$$t' = 29{,}8(c),\ t'' = -19{,}8(c).$$

Фізичний сенс має позитивне значення часу t = 29,8 с.
Тому дальність польоту

$$S = V_0 \cos\alpha \cdot t,$$

$$S=10\cos30^\circ \cdot 29{,}7=258{,}1\ (м)\approx 258\ м.$$

Складові швидкості в момент падіння:

$$V_{tx} = 10\cos 30^\circ = 8,7 \ (м/с)\cdot$$

$$V_{ty} = -10\sin 30^\circ + 9,8\cdot 29,8 = 292,0 \ (м/с);$$

$$V_t = \sqrt{V_{tx}^2 + V_{ty}^2};$$

$$V_t = \sqrt{8,7^2 + 292,0^2} = 292,1(м/с).$$

Кут нахилу вектора швидкості до поверхні землі γ (див. рис. 1.9) дорівнює:

$$\gamma = arctg\,\frac{V_{ty}}{V_{tx}} = arctg\,\frac{292,0}{8,7} = 88^\circ 18'.$$

Третя група запитань потребує знаходження складових прискорення руху тіла через t = 2с після початку руху. Так як повне прискорення руху є прискоренням вільного падіння, то тангенціальне і нормальне прискорення дорівнюють (див. рис. 1.9):

$$a_\tau = g\sin\beta;\ a_n = g\cos\beta;$$

$$\beta = arctg\,\frac{V_y}{V_x} = arctg\,\frac{-V_0\sin\alpha + gt}{V_0\cos\alpha};$$

$$\beta = arctg\,\frac{-10\sin 30^\circ + 9,8\cdot 2}{10\cos 30} = 59^\circ 19';$$

$$a_\tau = 8,43 м/с^2;\ a_n = 5,0 м/с^2.$$

Радіус кривизни траєкторії в досліджуваний момент руху знайдемо з формули нормального прискорення:

$$a_n = \frac{V^2}{R}\ .$$

$$R = \frac{V^2}{a_n},$$

де $V = \sqrt{{V_{1x}}^2 + {V_{1y}}^2}$.

Тоді:

$$R = \frac{V_x^2 + V_y^2}{a_n} = \frac{(V_0 \cos\alpha)^2 + (-V_0 \sin\alpha + gt)^2}{a_n};$$

Визначимо чисельне значення радіуса:

$$R = \frac{(10\cos 30°)^2 + (-10\sin 30° + 9{,}8 \cdot 2)^2}{5{,}0} = 57{,}6\ (м).$$

Для запису рівняння траєкторії руху в координатній формі необхідно в системі рівнянь (1.11) позбутися параметру t. З першого рівняння системи (1.11) виразимо час

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}.$$

Підставивши цей вираз в третє рівняння системи (1.11)одержимо:

$$y = \frac{g}{V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 - x \cdot tg\alpha\ ,$$

$$y = 0{,}13x^2 - 0{,}58x\ .$$

Відповідь: H_{max}=31,2 м; t=29,8 с; S=258,1м; V_t=292,1м/с; γ=88°18′; a_τ=8,43м/с^2; a_n=5,0 м/с^2;R=57,6 м; y=0,13x^2-0,58x.

Приклад 1.9. Пілоту літака, що летів курсом на схід на висоті h=1000 м із швидкістю V_1 = 360 км/г надіслано радіограму з вимогою скинути вимпел таким чином, щоб він потрапив у певне місце палуби корабля, який рухався із швидкістю V_2 = 72 км/г курсом на північний схід під кутом α = 30° до паралелі. Визначити місце положення літака на момент викиду вимпела.

Розв'язання. В даному випадку корисно використати координатно-векторний спосіб дослідження, прийнявши за початок координат положення корабля на момент скинення вимпела із літака. Напрямок паралелі на схід – виберемо за додатній напрямок осі Ох, напрямок меридіану на північ - за додатній напрямок осі Оу, а напрямок вертикально вгору - за додатній напрямок осі Oz.

На рис. 1.10 до умови задачі вказані вектори початкової швидкості вимпела та вектор прискорення його руху, а також вектор швидкості корабля і радіус-вектор точки початку руху вимпела.

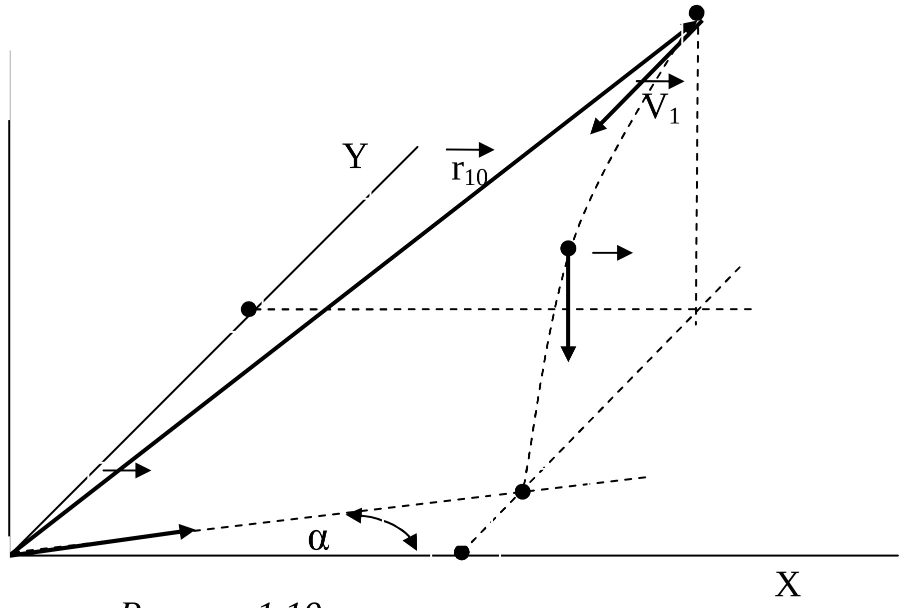


Рисунок 1.10

Рух вимпела рівнозмінний. Рух корабля рівномірний.

Рівняння руху вимпела має вигляд:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{10} + \vec{V}_1 t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

$$\vec{V}_1 t = \vec{V}_1 t + \vec{g}t \tag{1.12}$$

Рівняння руху корабля:

$$\vec{r}_2 = \vec{V}_2 t. \tag{1.13}$$

Для заміни векторних рівнянь скалярними вибираємо осі координат та початок відліку як вказано на рис.1.10. При такому виборі осей координат

$$x_{10} = x;\ y_{10} = y;\ z_{10} = z = h;\ Vx_1 = 0;\ V_{1y} = -V_1;\ V_{1z} = 0;\ g_{\ x} = 0;\ g_{\ z} = -g;$$

$$V_{2x} = V_2 cos\alpha;\ V_{2y} = V_2 sin\alpha. \tag{1.14}$$

В постановці запитання до задачі в рівнянні (1.13) немає потреби. Тому рівняння руху досліджуваних тіл в проекціях мають такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_{10} = x; \\
&y_1 = y - V_1 t; \\
&z_1 = h - \frac{gt^2}{2} \\
&x_2 = V_2 \cos\alpha \cdot t; \\
&y_2 = V_2 \sin\alpha \cdot t;\; z_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Рівняння (1.15) дають інформацію про довільні точки траєкторії руху, але щоб дослідити конкретну її точку необхідно ввести допоміжну інформацію.

Потрапити вимпелу на корабель означає рівність координат, які матимуть вимпел і корабель:

$$x_1 = x_2;\; y_1 = y_2;\; z_1 = z_2.$$

Підставивши відповідні рівняння з системи рівнянь (1.15) і (1.14), отримаємо:

$$h - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

Звідки час польоту дорівнює:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Підставимо цей вираз в рівняння

$$x = V_2 \cos\alpha \cdot t$$

і одержимо:

$$x = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot V_2 \cos\alpha, \tag{1.16}$$

З рівняння

$$y - V_1 t = V_2 \sin\alpha t$$

виразимо координату у:

$$y = (V_1 + V_2 \sin\alpha)\sqrt{\frac{2h}{g}}\ . \qquad (1.17)$$

.

Підставимо значення заданих величин в формули (1.16), (1.17) і виконаємо обчислення координат вимпела в момент його кидання з літака:

$$x = \sqrt{\frac{2\cdot 1000}{9{,}8}}\,20\cos 30^\circ = 247{,}4(м) \quad ;$$

$$y = (10 + 20\cdot\sin 30^0)\sqrt{\frac{2\cdot 1000}{9{,}8}} = 285{,}7(м)\ .$$

$$z = 1000м\ .$$

Відповідь**:** літак на момент відправлення вимпела повинен знаходитись в точці простору з координатами (*247,4 м, 285,7м, 1000 м*) в системі відліку, пов'язаній з землею, де за початок відліку прийнято положення корабля на момент викиду вимпела.

Приклад 1.10 Три весляра, що знаходяться в човнах на рівній відстані один від одного, яка на початок дослідження становила відстань а, виконують рух з постійною швидкістю V таким чином, щоб кожен з них рухався в напрямку іншого, що є в нього по курсу. Визначити час руху до їх зустрічі в центрі створюваного човнами трикутника.

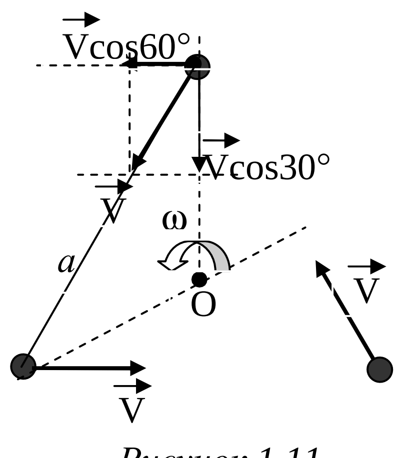


Рисунок 1.11

Розв'язання. Застосуємо координатно-векторний спосіб дослідження, прийнявши за систему відліку, систему, що має тілом відліку всі човни і обертається (див. рис.1.11) з кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{V\cos 60^\circ}{r(t)},$$

де *r(t)* виражається співвідношенням:

$$r(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} - V\cos 30^\circ t .$$

Таким чином кутова швидкість дорівнює:

$$\omega = \frac{V\cos 60^\circ}{\frac{a}{\sqrt{3}} - V\cos 30^\circ t} = \frac{1}{\frac{2a}{\sqrt{3}V} - tg\,60^\circ t} .$$

Кутова швидкість зростає з плином часу руху. В такій системі відліку човни рухаються до центру із швидкістю Vcos30° і повинні пройти шлях $S = \frac{a}{\sqrt{3}}$ (див рис.1.11), якщо вважати, за першим припущенням, що човни є точковими об'єктами.

Отже, час руху човнів до зустрічі:

$$t = \frac{S}{V\cos 30^\circ} = \frac{2a}{3V} .$$

Кутова швидкість для цього моменту часу стане нескінченно великою $\left(t \to \frac{2a}{3V};\quad \omega \to \infty\right)$, що є результатом нехтування розмірівчовнів. Можна задачу ускладнити, задаючи лінійні розміри човнів.

Відповідь: $t \to \frac{2a}{3V}$.

Задачі з теми «Кінематика матеріальної точки, поступального і обертального рухів твердого тіла».

1.1 Радіус-вектор частинки змінюється з часом по закону $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k}$. Визначити вектори швидкості та прискорення, їх модулі.

1.2 Залежність шляху від часу описується рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$, де A = 3 м, B = 2 м/с, C = 1 м/с^2. Визначити середню швидкість і середнє прискорення тіла за t = 10 с його руху.

1.3 Вектор швидкості руху тіла задано рівнянням $\vec{v} = A\vec{i} + Bx\vec{j}$, де A і В – сталі величини. Тіло починає рухатися з початку координат. Визначити радіус-вектор, вектори швидкості та прискорення як функції від часу.

1.4 Автомобіль, маючи швидкість v_0 = 8 м/с, починає гальмувати і зупиняється через t = 4 с після початку гальмування. Записати залежність швидкості $V_x(t)$ і координати x від часу, вважаючи, що в початковий момент часу автомобіль перебуває в початку координат. Знайти гальмівний шлях.

1.5 Залежність швидкості матеріальної точки від часу задана рівнянням V_x = 6t. Написати залежність x(t), якщо в момент початку відліку часу точка, що рухається, перебувала в початку координат. Обчислити шлях, пройдений матеріальною точкою за t = 10 с.

1.6 Рух двох автомобілів задано рівняннями: $x_1 = 0{,}2\cdot t^2$ і $x_2 = 45 – 8\cdot t$. Описати картину руху автомобілів; знайти час і місце зустрічі автомобілів; знайти координату першого автомобіля в момент часу, коли другий виявиться в початку координат.

1.7 Рух матеріальних точок задано наступними рівняннями: $x_1 = 10t + 0{,}4t^2$ і $x_2 = 2t – t^2$. Описати картину руху. Для кожного випадку написати залежність $V_x(t)$ і побудувати графіки цих залежностей.

1.9 Руху двох автомобілів по шосе задані рівняннями $x_1 = 2t +0{,}2t^2$ і $x_2 = 80 – 4t$. Описати картину руху, знайти час і місце зустрічі автомобілів, відстань між ними через п'ять секунд після початку руху.

1.10 Точка рухається по колу радіусом R=8 м. У деякий момент часу нормальне прискорення точки a_n = 4 м/с^2, вектор повного прискорення а утворює в цей момент із вектором нормального прискорення a_n кут α=60°. Знайти швидкість v і тангенціальне прискорення a_τ точки.

1.11 Матеріальна точка рухається по колу, радіус якого R = 2 м. Залежність шляху, пройденого точкою, від часу задана рівнянням $s = t^3 + 4t^2 - t + 8$. Визначити середню швидкість і прискорення через 3 с після початку руху.

1.12 Залежність пройденого тілом шляху s від часу t задана рівнянням $s=At+Bt^2$, де: А=3 м/с, В=2 м/с^2. Знайти середню швидкість і середнє прискорення тіла в інтервалі від 1с до 4с.

1.13 Визначити швидкість v і повне прискорення а точки в момент часу t=2 с, якщо вона рухається по колу радіусом R = 1 м відповідно до рівняння $\xi = At+Bt^3$, де А = 8 м/с; В = -1 м/с^2; ξ – криволінійна координата, відлічена від деякої точки, прийнятої за початкову, вздовж кола

1.14 Матеріальна точка рухається із прискоренням а = 5м/с^2. Визначити, на скільки шлях, пройдений точкою в n-ю секунду, буде більше шляху, пройденого за попередню секунду. Прийняти v_o=0.

1.15 Тіло падає з висоти h=19,6 м з нульовою початковою швидкістю. Який шлях пройде тіло: а) за перші 0,1 с свого руху, б) за останні 0,1 с свого руху? Опір повітря не враховувати.

1.16 Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю v_o = 4 м/с. Коли воно досягло верхньої точки польоту, з того ж початкового пункту, з тією ж початковою швидкістю v_o вертикально вгору кинуте друге тіло. На якій відстані h від початкового пункту зустрінуться тіла? Опір повітря не враховувати.

1.17 Камінь кинули з вежі в горизонтальному напрямку з швидкістю v_0 = 30 м/с. Знайти швидкість v, тангенціальне a_τ і нормальне a_n прискорення в кінці другої секунди після початку руху.

1.18 Пуля випущена з початковою швидкістю v_0 = 200 м/с під кутом α = 60^0 до горизонту. Визначити найбільшу висоту підйому, дальність польоту і радіус кривизни траєкторії пулі в її найвищий точці. Опір повітря не враховувати.

1.19 Тіло кинули під кутом α = 30^0 до горизонту. Знайти тангенціальне і нормальне прискорення в початковий момент часу?

1.20 Тіло кинуто під кутом α=30° із швидкістю V_o=30 м/с. Які нормальне a_n і тангенціальне a_τ прискорення матиме тіло через час t=1 с після початку руху?

1.21 З однієї і тієї ж точки в один і той же момент часу під кутом α до горизонту кидають два каменя з швидкостями v_{01} і v_{02} ($2\,v_{02} \leq v_{01}$).

1.22 Яка відстань стане між ними в той момент, коли перший з них досягне найвищої точки підйому?

1.24 Вздовж похилої площини пустили котитися знизу вгору маленьку кульку. На відстані s = 30 см кулька побувала два рази: через t_1 =1 с і через t_2 = 2с після початку руху. Визначити початкову швидкість кульки і прискорення, вважаючи рух рівноприскореним.

1.25 Кулька пущена вгору на похилій площині, проходить послідовно два рівних відрізка довжиною 30 см кожний і продовжує рухатися далі. Перший відрізок кулька пройшла за час t_1 = 6 с, а другий за t_2 = 12 с. Знайти швидкість кульки в кінці першого відрізка шляху.

1.26 Яку відстань по горизонталі пролетить м'яч, який кинули із швидкістю 10 м/с під кутом 60^0 до горизонту, якщо він вдариться об стелю. Висота стелі 3 м, удар пружний. Опором повітря знехтувати.

1.27 Визначити повне прискорення a в момент t = *3 с* точки, яка знаходиться на ободі колеса радіусом R = *0,5 м,* що обертається відповідно до рівняння $\varphi = At+Bt^3$, де A = *2рад/с*; B = *0,2рад/с*^{3}.

1.28 Точка рухається по колу радіусом R=*8 м*. У деякий момент часу нормальне прискорення точки a_n = *4 м/с*^{2}, вектор повного прискорення a утворює в цей момент із вектором нормального прискорення a_n кут α = *60°*. Знайти швидкість v і тангенціальне прискорення a_τ точки.

1.29 Точка рухається по колу радіусом R=*30 см* з постійним кутовим прискоренням ε. Визначити тангенціальне прискорення точки a_τ, якщо відомо, що за час t = *4 с* вона зробила три оберти, і наприкінці третього обороту її нормальне прискорення a_n = *2,7 м/с*^{2}.

1.30 Колесо обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу дається рівнянням $\varphi = A+Bt+Ct^2+Dt^3$, де $B = 1$ *рад/с*, $C = 1$ *рад/с*^{2}, $D=2$ *рад/с*^{3}. Знайти радіус колеса, якщо відомо, що до кінця другої секунди руху нормальне прискорення точок колеса, що лежать на обіді колеса, дорівнює $a_n = 3{,}46\cdot 10^2$ *м/с*^{2}.

1.31 Диск радіусом $R = 0{,}2$ *м* обертається відповідно до рівняння $\varphi = A+Bt+Ct^3$, де $A = 3$ *рад*; $B = -1$ *рад/с*; $C = 0{,}1$ *рад/с*^{3}. Визначити тангенціальне a_τ, нормальне a_n і повне a прискорення точок на ободі диска для моменту часу $t = 10$ *с*.

1.32 Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2$ *рад/с*^{2}. Через $t = 0{,}5$ *с* після початку руху повне прискорення колеса стало дорівнювати $a = 13{,}6$ *см/с*^{2}. Визначити радіус колеса.

1.33 Знайти кутове прискорення колеса, якщо відомо, що через *2 с* після початку рівноприскореного руху вектор повного прискорення точки, що лежить на ободі, становить кут 60° з напрямком лінійної швидкості цієї точки.

1.34 Матеріальна точка рухається по колу, радіус якої *2 м*. Залежність шляху, пройденого точкою, від часу задана рівнянням $s = t^3 + 4t^2 - t + 8$. Визначити середню швидкість через *3 с* після початку руху, а також кутову швидкість і прискорення через *5 с*.

Контрольні запитання з теми «Кінематика матеріальної точки, поступального і обертального рухів твердого тіла»

1 Який рух називається механічним?
2 Який рух називається поступальним?
3 Що називається системою відліку?
4 Що таке матеріальна точка?
5 Що називають радіус-вектором матеріальної точки відносно початку координат?
6 Що називається траєкторією руху матеріальної точки?
7 Що таке переміщення?
9 Що означає вирішити основну задачу кінематики?
10 Що означає вивчити рух матеріальної точки при застосуванні координатного способу до вивчення руху?
11 Що означає вивчити рух матеріальної точки у векторному способі вивчення руху?
12 Що означає вивчити рух матеріальної точки в природному способі вивчення руху?
13 Що таке швидкість руху матеріальної точки?
14 Яка з приведених формул

$$а)\upsilon_c = \frac{\Delta s}{\Delta t};\quad б)\upsilon = \frac{ds}{dt};\quad c)\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt};\quad д)\upsilon_x = \frac{dX}{dt};\quad е)\vec{\upsilon}_c = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t};\quad к)\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

визначає

1)швидкість зміни шляху (шляхова швидкість)?

2) швидкість зміни координати

3) середню швидкість переміщення

4) середню шляхову швидкість

5) кутову швидкість

15 Що називається прискоренням матеріальної точки (прискорення переміщення)?

16 Що таке прискорення зміни шляху?

17 Яке рівняння руху відповідає векторному способу розв'язання основної задачі кінематики?

18 Як визначається швидкість при векторному способі рішення основної задачі кінематики?

19 Як записується рівняння руху для рівномірного руху в векторному способі вивчення руху.

20 Як записується рівняння руху для рівномірного руху в координатному способі вивчення руху.

21 Як записується рівняння руху для рівномірного руху в природному способі вивчення руху.

22 Як записується рівняння руху для рівномірного руху в координатному способі вивчення руху для полярної системи координат..

23 Як записується рівняння руху для рівнозмінного руху у векторному способі вивчення руху.

24 Як записується рівняння руху для рівнозмінного руху в природному способі вивчення руху.

25 Яка із зазначених умов відповідає рівномірному прямолінійному рухові?

1) $\upsilon = const$ .2) $\vec{\upsilon} = const$ .3) $\vec{a} = const$ .4) $a = const$ .5) $a = 0$.

26 Яка із зазначених умов відповідає рівномірному криволінійному рухові?

1) $a = const$ .2) $\vec{\upsilon} = const$ .3) $\vec{a} = const$ .4) $a_n = const$ .5) $a_\tau = 0$.

27 Які із зазначених умов відповідають рівнозмінному прямолінійному руху?

1) $a_n = 0$, 2) $\vec{\upsilon} = const$, 3) $\vec{a} = const$, 4) $a_n = const$, 5) $a_\tau = const$.

28 Яка з приведених формул визначає модуль радіуса-вектора?

1) $\Delta\vec{r} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$, 2) $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, 3) $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$,

4) $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}$, 5) $\vec{\upsilon} = \vec{i}\,\upsilon_x + \vec{j}\,\upsilon_y + \vec{k}\,\upsilon_z$.

29 Як визначається вектор прискорення через його проекції на осі координат?
30 Як визначається повне прискорення матеріальної точки, що рухається по криволінійній траєкторії?
31 Що характеризує нормальне прискорення?
32 Що характеризує тангенціальне прискорення
33 Як знаючи закон зміни радіус-вектора матеріальної точки знайти закон зміни її швидкості вздовж заданого напрямку?
34 Як знаючи закон зміни радіус-вектора матеріальної точки зайти закон зміни її прискорення вздовж заданого напрямку?
35 Як підрахувати миттєві швидкість і прискорення в даний момент часу?
36 Як визначити вектор швидкості матеріальної точки, якщо відомий закон зміни її радіус-вектора відносно системи координат? Як визначити модуль радіус-вектора?
37 Як визначити модуль вектора швидкості?
38 Як визначить вектор прискорення матеріальної точки, якщо відомий закон зміни її швидкості відносно системи координат?
39 Як визначити модуль вектора прискорення?
40 Як визначить вектор прискорення матеріальної точки, якщо відомий закон зміни її радіус-вектора відносно системи координат?
41 Як можна одержати закон зміни швидкості вздовж заданого напрямку, якщо відомий закон зміни прискорення вздовж цього напрямку?
42 Як можна одержати закон зміни координати вздовж заданого напрямку, якщо відомий закон зміни прискорення вздовж цього напрямку?
43 Чому дорівнює відстань між двома точками в просторі?
44 Як визначити відстань в даний момент часу між двома рухомими матеріальними точками в просторі, якщо відомі закони зміни їх швидкостей в одній і тій самій системі відліку?
45 В чому полягає принцип незалежності руху?
46 Який рух здійснює тіло, якщо його кинути вертикально вгору?
47 Який рух здійснює тіло, якщо його кинути горизонтально до поверхні Землі?
48 Який рух здійснює тіло, якщо його кинути під кутом до поверхні Землі?
49 Що називають кривизною траєкторії?
50 Який рух називають обертальним?
51 Які фізичні величини характеризують обертальний рух твердого тіла?
52 Що таке кутова швидкість?
53 Що таке кутове прискорення?
54 Який вигляд має рівняння обертального руху?
55 Як визначається напрямок кута повороту?
56 Як напрямлена кутова швидкість?
57 Для якого обертального руху кутове прискорення співпадає за напрямком з кутовою швидкістю?

58 Як визначається кутова швидкість при рівноприскореному обертанні?
59 Як визначається кут повороту при рівноприскореному обертанні?
60 Як визначається кут повороту при рівносповільненому русі?
61.Який зв'язок між кутовою швидкістю і лінійною швидкістю?
62 Як лінійне прискорення пов'язане з кутовим прискоренням?
63 Як виразити нормальне прискорення через кутові величині?
64 Як виражається повне прискорення матеріальної точки, що рухається по колу, через кутову швидкість і кутове прискорення?
65 Які величини є однаковими для кожної точки тіла , що обертається навколо нерухомої осі?

1.2 **ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК.**

Основні поняття і формули

Теорія розглянутих питань викладена в «електронному конспекті лекцій» [10]

Динаміка вважається основним розділом механіки тому, що виявляє причини руху тіл та його зміни і встановлює закони руху. В основі динаміки лежать три закони Ньютона. Перший закон вводить поняття інерціальних систем відліку, в яких мають місце закони механіки. Він стверджує, що рух з заданою швидкістю є безпричинним. Швидкість руху тіла залежить від вибору системи відліку. Причинною зміни швидкості тіл є дія на дане тіло інших тіл.

Швидкість зміни швидкості – це прискорення. Отже причиною появи прискорення тіла є дія на нього інших тіл.

Механічною мірою такої дії одного тіла на інше є сила $\vec{F}$. Здатність тіла противитись дії сил - є інертність тіла. Мірою інертності тіла є його маса m.

Другий закон Ньютона стверджує, що прискорення, отримане матеріальною точкою прямо пропорційне рівнодійній всіх сил,

прикладених до неї і обернено пропорційне її масі:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}{m}.$$

Матеріальна точка масою m, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$ має імпульс

$$\vec{p} = m\vec{v} \, .$$

Другий закон Ньютона з використанням поняття імпульсу має вигляд:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

де $\vec{F}$ – рівнодійна сил, що діють на тіло.

Сили в механіці:

а) сила пружності

$$F = -kx,$$

де k -- коефіцієнт пружності (у випадку пружини --жорсткість);

x -- абсолютна деформація;

б) сила тяжіння

$$\vec{P} = m\vec{g} \, ,$$

в) сила гравітаційної взаємодії

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де G – гравітаційна стала,

m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл,

r– відстань між тілами, а тіла розглядаються як матеріальні точки (у випадку гравітаційної взаємодії силу всесвітнього тяжіння можна виразити також через напруженість G гравітаційного поля $\vec{F} = m\vec{G}$)

г) сила тертя (ковзання)

$$F = \mu N,$$

де μ – коефіцієнт тертя,

N – сила реакції опори, що дорівнює силі нормального тиску.

Рух системи матеріальних точок характеризується рухом її центра мас. Центром мас механічної системи називається точка, радіус-вектор якої визначається по формулі:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

Рух механічної системи може розглядатись як рух центра мас з масою всієї системи:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_c = M\vec{v}_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i; \quad \vec{p}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i,$$

де $\vec{p}_c$ - результуючий імпульс механічної системи.

Закон руху механічної системи стверджує, що результуючий імпульс механічної системи може бути зміненим дією тільки зовнішніх сил по відношенню до системи:

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i.$$

Якщо зовнішні сили не діють $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$, то така система тіл називається замкненою. Для неї має місце закон збереження імпульсу:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = const,$$

або для двох тіл (i = 2):

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

де $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ - швидкості тіл у момент часу, прийнятий за початковий;

$\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ - швидкості тих же тіл у момент часу, прийнятий за кінцевий.

Робота сили визначається як криволінійний інтеграл виду:

$$A = \int_{(s)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(s)} F_s ds = \int_{(s)} F ds \cos\alpha,$$

де $d\vec{r}$ - елементарне переміщення,

$ds = |d\vec{r}|$ - модуль переміщення або елемент шляху,

$F_s = F \cos\alpha$ -- проекція сили на напрямок руху;

α –- кут між напрямком сили та переміщення.

Робота постійної сили

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.$$

Для прямолінійного руху тіла під дією постійної сили механічна робота

$$A = Fs\cos\alpha.$$

Робота рівнодійної всіх сил, прикладених до тіла дорівнює зміні його кінетичної енергії (теорема про кінетичну енергію):

$$A = \frac{m\vec{v}_2^{\,2}}{2} - \frac{m\vec{v}_1^{\,2}}{2} = T_2 - T_1.$$

Кінетична енергія тіла, що рухається поступально:

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Сили, робота яких не залежить від форми траєкторії руху, називаються потенціальними або консервативними. Робота потенціальної сили дорівнює зменшенню відповідної потенціальної енергії:

$$A = -(\Pi_2 - \Pi_1).$$

Потенціальна енергія:

а) пружно деформованої пружини

$$\Pi = \frac{kx^2}{2},$$

де k– жорсткість пружини,
x– абсолютна деформація;

б) гравітаційної взаємодії

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r},$$

де G – гравітаційна стала,
m_1 і m_2 - маси взаємодіючих тіл,
r - відстань між ними (тіла розглядаються як матеріальні точки);

в) тіла, що перебуває в однорідному полі сили тяжіння

$$\Pi = mgh,$$

де g - прискорення вільного падіння?
h - висота тіла над рівнем, прийнятим за нульовий (формула справедлива за умови h<R, де R - радіус Землі).

Механічною енергією тіла називається фізична величина, що визначається сумою кінетичної та потенціальної енергій:

$$E = T + \sum_{i=1}^{N} \Pi_i \, .$$

Механічну енергію тіла можна змінити тільки роботою неконсервативних сил (неконсервативними такі сили, робота яких пов'язана з перетворенням механічної енергії в інші види, або навпаки, механічна енергія створюється за рахунок інших її видів, наприклад, це сили тиску пару, сила м'язів, сили тертя та інші):

$$A_{нк} = E_2 - E_1.$$

Якщо неконсервативні сили не виконують роботу, то механічна енергія тіла зберігається:

$$E_1 = E_2; \quad T_1 + \sum_{i=1}^{N} \Pi_i^{(1)} = T_2 + \sum_{i=1}^{N} \Pi_i^{(2)}.$$

Механічною енергією системи тіл називається фізична величина, що визначається сумою кінетичних енергій всіх тіл системи та потенціальною енергією їх взаємодії:

$$E = \sum_{i=1}^{N} T_i + \Pi.$$

Механічну енергію системи тіл можна змінити або роботою довільних зовнішніх, або роботою внутрішніх неконсервативних сил. Система тіл, над якою зовнішні сили не виконують роботу, називається замкненою. Система тіл, в якій внутрішні сили, що виконують роботу є потенціальними, називається консервативною або потенціальною. Механічна енергія замкненої консервативної системи тіл зберігається. Це твердження є закон збереження механічної енергії:

$$E_1 = E_2; \quad \sum_{i=1}^{N} T_i^{(1)} + \Pi_1 = \sum_{i=1}^{N} T_i^{(2)} + \Pi_2 .$$

Приклади розв'язання задач з динаміки *поступального руху* **матеріальної точки і системи матеріальних точок**

Не зупиняючись на особливостях розв'язку тих задач, в яких необхідно за даними задачі визначити певні динамічні характеристики руху матеріальних точок, розглянемо задачі, які потребують аналізу руху тіл під дією сил і в яких необхідно застосування законів Ньютона.

Нагадуємо, що розв'язок задач з фізики складається з наступних пунктів: 1) уважного вивчення умови задачі, 2) фізичного розв'язку, 3) алгебраїчного розв'язку, 4) перевірки розмірностей , 5) арифметичного розв'язку і 6) запису відповіді.

Читання умови задачі в даному випадку можна вважати закінченим, якщо ви зрозуміли про яке тіло, або які тіла йде мова, який рух здійснюється, чи можна вважати досліджувані тіла матеріальними точками і з боку яких тіл відбувається дія на них. На рисунку, як правило, зображається досліджуване тіло або на вказаній поверхні, або на підвісі чи таке інше, та вказуються всі сили, що діють на дане тіло.

Якщо між поверхнею та тілом існує тертя, то силу взаємодії тіла з поверхнею зображають у вигляді двох складових: сили тертя $F_{тр}$ та сили реакції опору N, яка за третім законом Ньютона чисельно дорівнює силі $F_{нт}$ нормального тиску з боку тіла на поверхню. Ці дії пов'язані між собою співвідношенням

$$F_{тр} = \mu F_{нт} = \mu N,$$

де μ –- коефіцієнт сили тертя ковзання.

Фізичний розв'язок задачі зводиться до вибору системи відліку і, якщо вона інерційна (така що, як правило, пов'язана з Землею), то треба записати другий закон Ньютона у векторній формі. Для заміни векторних рівностей скалярними вибираємо осі проектування: одна, як правило, напрямлена вздовж прискорення (або швидкості) руху, інша – перпендикулярна до нього.

Якщо кількість отриманих рівнянь відповідає кількості невідомих, то можна приступати до алгебраїчного розв'язку задачі, який закінчується отриманням розрахункової формули та перевіркою розмірностей і записом результату розв'язання даної задачі. Якщо кількість невідомих перевищує кількість рівнянь, необхідно ще раз уважно прочитати умову задачі для пошуку допоміжних зв'язків між величинами або величин, які відомі з таблиць.

Одержаний результат повинен відповідати достовірності.

В задачах, що потребують використання закону збереження імпульсу, є деякі особливості їх фізичного розв'язку.

Імпульс залежить від системи відліку і змінюється при переході від однієї системи відліку до іншої. Після того, як з умови задачі зрозуміло, що йдеться про поступальний рух взаємодіючих тіл, і що є можливість розв'язувати задачу в інерційній системі відліку, наприклад пов'язаною з

Землею, то констатуючи ці факти, треба виконати два рисунки: для початкової (вона може не вказуватись, якщо початковим станом був стан спокою) та кінцевої ситуації. Досліджуються всі сили, що діють на тіла (їх можна не зображати на рисунках), та вияснється, чи можна систему цих тіл вважати замкненою. Для цього необхідно впевнитись, що імпульсами зовнішніх сил по відношенню до розглядуваної системи тіл можна знехтувати в постановці задачі. Закон збереження імпульсу записується у векторній формі. Для розв'язку задачі векторну рівність необхідно спроектувати на напрямок руху.

Якщо система тіл не замкнена, але сума проекцій зовнішніх сил на певний напрямок дорівнює нулю, або можна вважати, що їх сумарним імпульсом можна знехтувати, тоді сума проекцій імпульсів на даний напрямок зберігається

Задачі, що потребують використання закону збереження імпульсу та закону збереження механічної енергії мають свої особливості фізичного розв'язку.

Після цього аналізується: а) які з зовнішніх сил виконують роботу, а які її не виконують; б) які з внутрішніх сил потенціальні, а які не потенціальні. Сили, що не виконують механічну роботи не можуть змінювати механічну енергію тіл і системи тіл. Якщо система тіл є ізольованою і потенціальною, то можна використати і закон збереження імпульсу і закон збереження механічної енергії. Якщо система тіл не ізольована, або неконсервативна, то використовуються відповідні співвідношення.

Якщо досліджується рух одного тіла, то для нього всі діючі сили є зовнішніми і тоді розглядається тільки можливість зміни механічної енергії. А для цього досліджується тільки здатність тіл виконувати механічну роботу. Сили, що не виконують роботу не беруться до розгляду. Із сил, які виконують механічну роботу, треба вияснити які з них потенціальні, а які не потенціальні. Якщо ці сили потенціальні, то механічна енергія тіла зберігається. Якщо неконсервативні сили виконують роботу, то вона дорівнює зміні механічної енергії системи. Можливі інші ситуації, які виясняються шляхом аналізу сил, що діють на взаємодіючі тіла.

Приклад 2.01 Знайти силу тяги, яку розвиває двигун автомобіля, що рухається в гору з прискоренням a=1м/с^2. Уклін гори дорівнює 1м на кожні 25 м шляху. Маса автомобіля m = 10^3 кг. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,1.

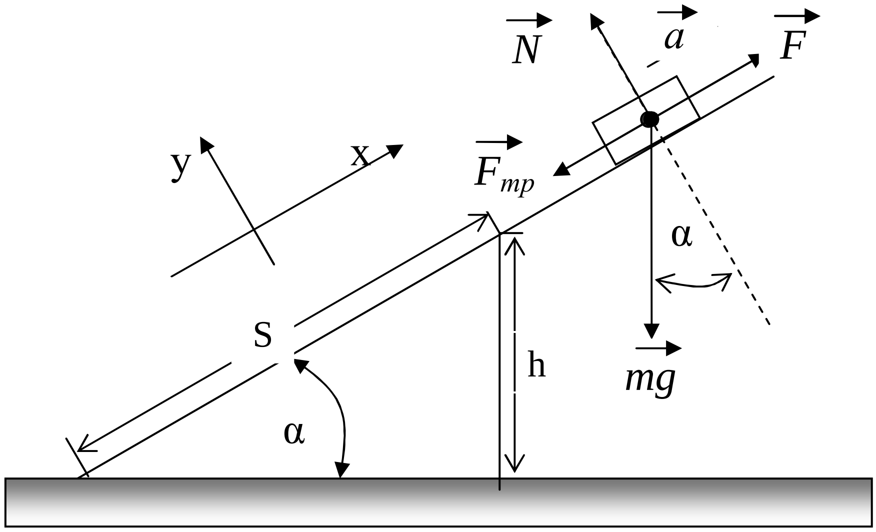


Рисунок 2.1

Розв'язання. Виберемо систему відліку, яка повязана з площиною та з Землею і яку в достатній мірі можемо вважати інерціальною. Автомобіль здійснює поступальний рух з прискоренням. Його можна вважати матеріальною точкою. На рис. 2.1 вказані сили, що діють на автомобіль: сила тяжіння $m\vec{g}$, реакція опори $\vec{N}$, сила тяги $\vec{F}$, сила тертя $\vec{F}_{тр}$.

За другим законом Ньютона запишемо векторну суму діючих на автомобіль сил:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{òð} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Для заміни векторної рівності скалярними величинами виберемо осі проектування, як вказано на рис. 2.1.

Тоді:

$$\begin{aligned} &ox: F - F_{тр} - mg\sin\alpha = ma; \\ &oy: N - mg\cos\alpha = 0; \\ &F_{тр} = \mu N. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.1), маємо:

$$N = mg\cos\alpha\,,\; F_{тр} = \mu mg\cos\alpha,$$

$$F - kmg\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma.$$

Виразимо $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{S^2 - h^2}}{S}$; $\sin\alpha = \frac{h}{S}$

Тоді:

$$F = m\left[a + g\left(\frac{h}{S} + \mu\frac{\sqrt{S^2 - h^2}}{S}\right)\right].$$

Провіримо розмірність:

$$[F] = кг\frac{м}{с^2}.$$

Підставимо в одержану формулу задані значення величин і проведемо розрахунки:

$$F = 10^3\left[1 + 9{,}8\left(\frac{1}{25} + 0{,}1\frac{\sqrt{25^2 - 1^2}}{25}\right)\right] = 2{,}21 \cdot 10^3 (H).$$

Відповідь: F = 2,21 кН.

Приклад 2.02. Невагомий блок закріплений на вершині похилої площини (рис.2.2), що складає з горизонтом кут α = 30°. Гирі A і B однакових мас $m_1 = m_2 = 1$кг з'єднані невагомою нерозтяжною ниткою і перекинуті через невагомий блок. Знайти прискорення, з яким рухаються гирі та силу натягу нитки, якщо коефіцієнт тертя ковзання гирі B по поверхні μ = 0.1.. Тертям в блоці знехтувати.

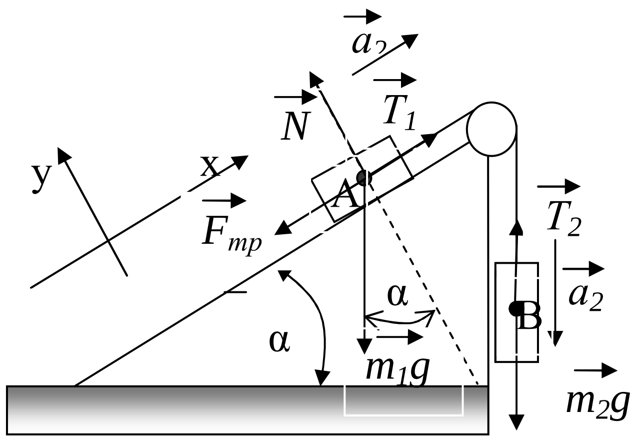


Рисунок 2.2

Розв'язання. Розглянемо рух тіл в системі відліку, повязаною з площиною та з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною. Гирі виконують поступальний рух, тому їх можна вважати матеріальними точками. Сили, що діють на кожну з гирь, вказані на рис. 3.8. За другим законом Ньютона векторна сума діючих сил на гирю A дорівнює:

$$\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{òð} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1, \qquad (2.2)$$

а на гирю В :

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2. \qquad (2.3)$$

Для заміни векторних рівностей скалярними виберемо осі проектування для гирі А так, як вказано на рис.2.2, а для гирі В – за напрямком її прискорення. Врахуємо, що модуль прискорення для обох гирь однаковий

$$a_1 = a_2 = a.$$

Модуль сили натягу повздовж нитки залишається незмінним, бо блок невагомий.

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_2 = \mathrm{T},$$

Тоді отримаємо:

$$T - F_{тр} - mg\sin\alpha = ma,$$

$$N - mg\cos\alpha = 0,$$

$$F_{тр} = \mu N, \qquad (2.4)$$

$$-T + mg = ma.$$

Після визначення сили тертя та підстановки її в перше рівняння системи рівнянь (2.4) отримаємо:

$$T - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma,$$

$$-T + mg = ma. \qquad (2.5)$$

Розв’язавши систему рівнянь (2.5), маємо:

$$a = \frac{g}{2}(1 - \mu\cos\alpha - \sin\alpha),$$

$$T = \frac{mg}{2}(1 + \mu\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Провіримо розмірність:

$$[a]=[g]=\frac{м}{с^2}; \quad [T]=кг\frac{м}{с^2}=Н.$$

Проведемо розрахунки:

$$a=\frac{9{,}8}{2}\left(1-0{,}1\cos 30°-\sin 30°\right)\left(\frac{м}{с^2}\right)=2{,}03\frac{м}{с^2},$$

$$T=\frac{1\cdot 9{,}8}{2}\left(1+0{,}1\cos 30°+\sin 30°\right)(Н)=7{,}8Н$$

Відповідь: a = 2,03 м/с^2; Т = 7,8 Н.

Приклад 2.3. Пілот літака, що летить із швидкістю v = 720 км/г повинен виконати «мертву петлю». Яким повинен бути радіус «мертвої петлі», щоб найбільша сила, що притискує пілота до сидіння дорівнювала п'ятикратній вазі пілота?

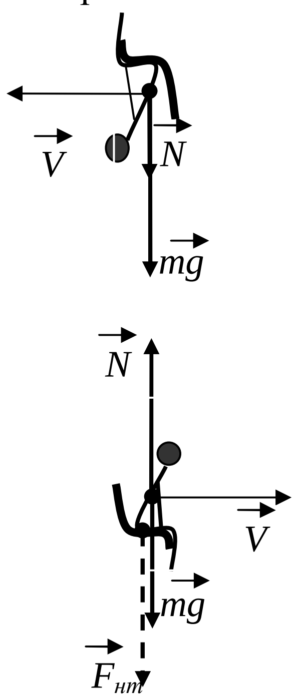


Рисунок 2.3

Р*озв'язання*. Розвязок задачі виконуємо в системі відліку, повязаною з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною. Літак разом з пілотом виконує поступальний рух, тому їх можна вважати матеріальними точками. Сили, що діють на пілота у нижній та верхній точках «мертвої петлі»сила тяжіння та реакція опори, вказані на рис. 2.3. Сила, що притискує пілота до сидіння за третім законом Ньютона дорівнює за модулем силі реакції сидіння: $F_{нт}$ = N (див. рис. 2.3). Під «вагою пілота» слід розуміт його вагу в стані спокою, тобто вона чисельно дорвнює силі тяжіння mg. З аналізу сил зрозуміло, що сила тиску на пілота є більшою в нижній точці «мертвої петлі». Тому задачу розв'язуємо тільки для цієї точки руху.

За другим законом Ньютона сума сил, що діють на пілота створюють доцентрове прискорення.

Тоді:

$$\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}.$$

Тут досліджується тільки доцентрове прискорення, тому що йдеться про рух по колу. В проекціях на напрямок руху до центру кола одержимо:

$$N - mg = ma_{дц} = m\frac{V^2}{R}.$$

$$5mg - mg = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{4g}.$$

Перевіримо розмірність:

$$[R] = \frac{м^2 с^2}{с^2 м} = м.$$

Виконаємо обчислення:

$$R = \frac{200^2}{4 \cdot 9{,}8}(м) = 1020 м.$$

Відповідь: R = 1020 м.

Приклад 2.4. Граната масою m в горизонтальному польоті із швидкістю V=70 м/с, розривається на два осколки (рис. 2.4). Менший осколок масою m_1 = 0,2m продовжує політ в попередньому напрямку із швидкістю V_1 = 400 м/с. Визначити швидкість польоту другого осколка гранати.

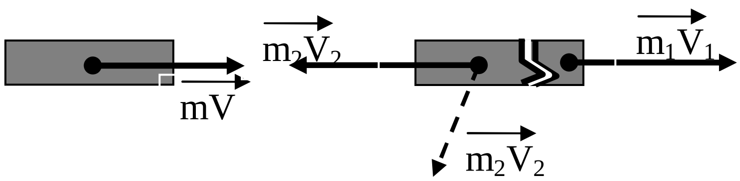


Рисунок 2.4

Розв'язання. Виберемо систему відліку, повязану з Землею, яку в достатній мірі можна вважати інерціальною.

Граната та її осколки (рис. 2.4) виконують поступальний рух, тому їх можна вважати матеріальними точками. Імпульсами сил тяжіння, що діють на гранату та її осколки можна знехтувати завдяки короткоплинності вибуху та їх порівняно малою величиною відносно внутрішніх сил, що призводять до розпаду гранати. Таким чином, з достатнім ступенем достовірності можна вважати систему осколків замкненою. Для цієї системи має місце рівність:

$$m\vec{V} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2, \qquad (2.6)$$

з якої випливає, що імпульс $m_2\vec{V}_2$ більшого осколка масою m_2 = 0,8m може бути тільки паралельним або антипаралельним напрямку руху гранати, як це зображено на рис. 2.4. Можливий напрямок цього вектора під деяким кутом до вихідного напрямку польоту гранати (умовно зображений на рис. 2.4 пунктиром) неможливий – векторна сума (2.6) не може бути реалізованою в таких випадках. Проекція рівності (2.6) на напрямок руху гранати дає результат:

$$mV = m_1V_1 - m_2V_2. \qquad (2.7)$$

Отже визначимо шукану швидкість польоту другого осколка:

$$V_2 = \frac{m_1V_1 - mV}{m_2} = \frac{0{,}2m400 - m70}{0{,}8m} = 12{,}5\left(\frac{м}{с}\right).$$

Перевіримо розмірність:

$$[V_2] = [V] = \frac{м}{с}.$$

Відповідь: V_2=12,5 м/с.

Приклад 2.5. Гармата встановлена на платформі, що рухається горизонтально із швидкістю V=36 км/г (рис. 2.5), виконує постріл під кутом α = 30° до горизонту в напрямку руху. Початкова швидкість снаряду V_1=400 м/с. Визначити швидкість V_2 руху платформ після пострілу, якщо маса платформи разом з гарматою m=10^4 кг, а маса снаряду m_1= 100 кг.

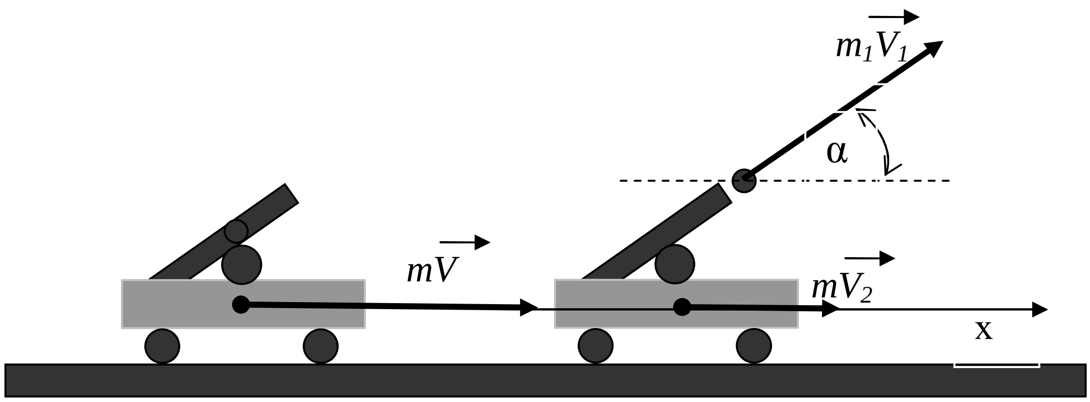


Рисунок 2.5

Розв'язання. Розв'язок задачі виконуємо в системі відліку, повязаною з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною. Платформа разом з гарматою та снарядом (рис. 2.5) здійснюють поступальний рух, тому їх можна вважати матеріальними точками. Для цієї системи тіл, розглянувши дії зовнішніх сил, дійдемо висновку, що сила реакції опору рейок не є скомпенсованою, вона призводить до збільшення вертикальної складової імпульсу снаряду. Але, нехтуючи імпульсом сил тертя, сума проекцій зовнішніх сил на напрямок руху платформи, дорівнює нулю. Тому має місце рівність алгебраїчної суми проекцій імпульсів тіл системи на напрямок руху платформи (див. рис. 2.5) до початку пострілу і після нього:

$$mV = m_1V_1\cos\alpha + mV_2. \qquad (2.8)$$

Звідси одержимо:

$$V_2 = \frac{mV - m_1V_1\cos\alpha}{m} \qquad (2.9)$$

$$[V_2] = [V] = м/с.$$

$$V_2 = \frac{10^4 \cdot 10 - 100 \cdot 400\cos 30°}{10^4} = 6{,}54\left(\frac{м}{с}\right).$$

Відповідь: V_2 = 6,54 м/с = 23,5 км/г, тобто рух платформи продовжився в попередньому напрямку, тільки з меншою швидкістю.

Приклад 2.5 Визначити роботу підняття тягаря масою m = 3 кг на висоту h = 2 м з прискоренням *a* = 3 м/с^2.

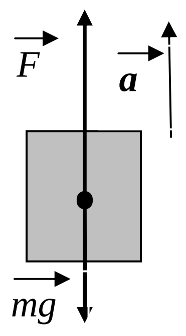


Рисунок 2.6

Розв'язання. Систему відліку, пов'яжемо з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною. Всі сили, що діють на тягар постійні. Робота підняття тягаря визначається роботою сили F (рис. 2.6). Ця сила постійна і діє в напрямку переміщення.

Робота постійної сили визначається за форлулою:

$$A = Fh. \tag{2.10}$$

Її значення знайдемо з другого закону Нютона, що в проекціях на напрямок прискорення дає:

$$F - mg = ma,$$

$$F = m(g + a). \tag{2.11}$$

Із співвідношень (2.10) та (2.11), маємо:

$$A = m(g + a)h.$$

Перевіримо розмірність:

$$[A] = кг\frac{м}{c^2}м = \frac{кгм^2}{c^2} = Дж$$

Проведемо розрахунки:

$$A = 3(9{,}8+3)2=76{,}8\ (Дж)$$

Відповідь: A = 76,8 (Дж)

Приклад 2.6 Яку роботу необхідно виконати, щоб поставити вертикально однорідний стрижень довжиною l = 2 м та масою m = 100 кг?

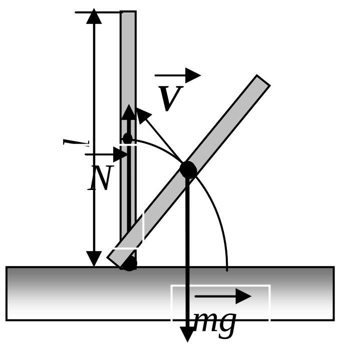


Рисунок 2.7

Розв'язання. Систему відліку виберемо повязаною з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною. Робота по підняттю стрижня у вертикальне положення виконується проти сили тяжіння стрижня, чисельно дорівнює роботі сили тяжіння.

Дійсно сила реакції опору поверхні $\vec{N}$ (рис. 2.7) прикладена в нерухомій точці, тому не виконує механічної роботи. Сила тяжіння $m\vec{g}$ (див. рис. 2.7) прикладена в центрі ваги стрижня в його центрі і переміщуючись по дузі кола радіусом *l/2* виконує роботу. Ця сила є потенціальною тому її робота, а, значить і робота зовнішньої сили, визначається як зміна потенціальної енерггії стрижня в кінцевому та початковому положеннях:

$$A = -A' = -\left[-\left(mg\frac{l}{2} - 0\right)\right] = mg\frac{l}{2}; A = mg\frac{l}{2}.$$

Підстановка чисельних значень величин дає результат:

$$A = 100 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{2}{2} = 981(Дж).$$

Відповідь: А=981 Дж.

Приклад 2.7. Ковзаняр масою М = 70 кг, стоячи на ковзанах на льоду, кидає в горизонтальному напрямку камінь масою m = 3 кг із швидкістю V=8м/с (рис.2.8). Визначити, на яку відстань відкотиться при цьому ковзаняр, якщо відомо, що коефіцієнт тертя заліза по льоду μ= 0,1.

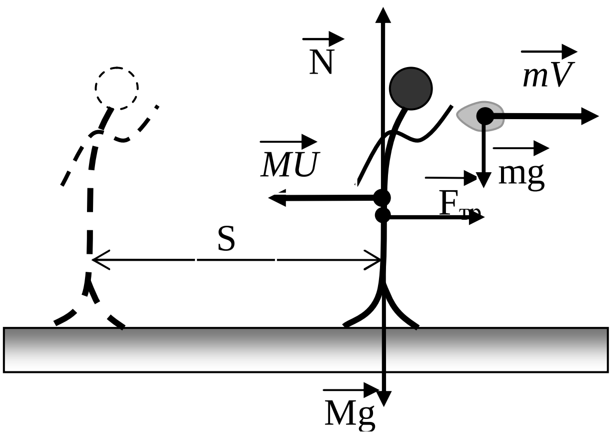


Рисунок 2.8

Розв'язання. Розв'язок задачі виконуємо в системі відліку, повязаною з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною. Ковзняр і камінь виконують поступальний рух, тому можуть вважатись матеріальними точками. Сили тяжіння $m\vec{g}$ і $M\vec{g}$ та сила реакції опору поверхні $\vec{N}$ (див. рис. 2.8) діють перпендикулярно до напрямку руху, тому вони не можуть змінити проекцію результуючого імпульсу системи тіл «ковзняр – камінь; імпульсом сили тертя ковзанів по льоду завдяки малому часу дії, можна нехтувати. Таким чином, для неї має місце закон збереження суми проекцій імпульсів на напрямок руху ковзняра:

$$-mV + MU = 0. \qquad (2.12)$$

З рівняння (2.12) визначимо початкову швидкість U руху ковзняра

$$U = V\frac{m}{M}.$$

В процесі руху ковзняра сила тяжіння $M\vec{g}$ та сила реакції опору поверхні $\vec{N}$ діють перпендикулярно до напрямку його руху, тому вони не виконують механічної роботи, а це означає, що вони не можуть змінити його механічної енергії. Єдина сила, що виконує механічну роботу, це сила тертя. Вона непотенціальна, тому робота сили тертя призводить до зміни механічної енергії ковзняра:

$$A_{тр} = F_{тр}S\cos 180°,$$

$$A_{тр} = E_2 - E_1 = -\frac{MU^2}{2}.$$

$$-\mu MgS = -\frac{MU^2}{2}. \qquad (2.13)$$

Зазначимо, що потенціальна енергія ковзняра не змінюється, а кінетична енергія при зупинці стане рівною нулю.

$$E_2 = 0.$$

Таким чином, з рівнянь (2.13) та (2.12) випливає, що

$$S = \frac{U^2}{2\mu g} = \left(\frac{m}{M}V\right)^2 \frac{1}{2\mu g}.$$

$$[S] = \frac{м^2}{с^2}\frac{с^2}{м} = м.$$

$$S = \left(\frac{3}{70}8\right)^2 \frac{1}{2\cdot 0{,}1\cdot 9{,}8} = 0{,}060\,(м) = 60\,см.$$

Відповідь: S = 60 см.

Приклад 2.8 Кулька масою m підвішена на нитці довжиною l (рис.2.9). Визначити, яку мінімальну швидкість *V* необхідно надати кульці, щоб вона могла досягти до верхньої точки траєкторії.

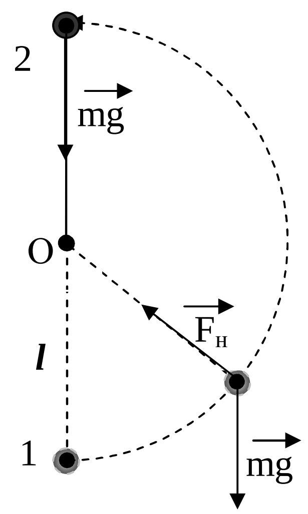


Рисунок 2.9

Розв'язання. Розв'язок задачі виконуємо в системі відліку, повязаною з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною. Кулька виконує поступальний рух, тому може вважатись матеріальною точкою. Сила натягу нитки не виконує механічну роботу. Сила тяжіння $m\vec{g}$ потенціальна, тому механічна енергія кульки зберігається:

$$T_1 + П_1 = T_2 + П_2.$$

Виберемо потенціальну енергію кульки нульовою в нижній точці: $П_1 = 0$ (див. рис. 2.9, точка 1)

Тоді

$$П_2 = 2mgl.$$

Кінетична енергія кульки в нижній точці, яку вона одержить дорівнює:

$$T_1 = \frac{mV^2}{2}.$$

Для того, щоб визначити швидкість U проходження вищої точки траєкторії руху кульки та її кінетичну енергію в цій точці, виходимо з умови, що сила тяжіння в цій точці забеспечує утримання кульки на траєкторії, створює їй доцентрове прискорення:

$$mg = \frac{mU^2}{l} \Rightarrow T_2 = \frac{mU^2}{2} = \frac{mgl}{2}.$$

Таким чином,

$$\frac{mV^2}{2} = 2mgl + \frac{mgl}{2} = \frac{5mgl}{2} \Rightarrow V = \sqrt{5gl}.$$

Відповідь: $V = \sqrt{5gl}$.

Приклад 2.9 Кулька масою m підвішена на невагомому жорсткому стрижні (на відміну від умови задачі 2.8) довжиною *l* (рис. 2.9). Визначити, яку мінімальну швидкість *V* необхідно надати кульці, щоб вона могла досягнути верхньої точки траєкторії.

Розв'язання. Розв'язок задачі здійснюється так само, як і задачі 2.8, але, завдяки тому, що кулька знаходиться на стрижні, її утримання на коловій траєкторії може забезпечити реакція стрижня, а швидкість може дорівнювати нулю.

Таким чином, умова збереження механічної енергії кульки:

$$T_1 + П_1 = T_2 + П_2$$

призводить до результату:

$$\frac{mV^2}{2} = 2mgl.$$

Звідки виражається швидкість кульки:

$$V = 2\sqrt{gl}.$$

Відповідь: $V = 2\sqrt{gl}$.

Задачі на закріплення теорії та навичок їх розв'язування з теми «Динаміка матеріальної точки і системи матеріальних точок»

2.1 Тіло масою m = 0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху s від часу t задана рівнянням $s = Bt + Ct^2 - Dt^3$, де C = 5 м/с, D = 1 м/с^2. Знайти величину сили, що діє на тіло в кінці першої секунди руху.

2.2 Визначити імпульс p, одержаний стінкою при ударі об неї кульки масою m=300 г, якщо кулька рухалася із швидкістю v =8 м/с під кутом α =60° до площини стінки. Удар об стінку вважати пружним

2.3 Дві гирі масами m_1 = 2 кг і m_2 = 1 кг сполучено ниткою і перекинуто через блок. Знайти: 1) прискорення a, з яким рухаються гирі, 2) сили натягнення T_1 і T_2 ниток, до яких прив'язані гирі. Тертям знехтувати.

2.4 Дві гирі масами $m_1 = m_2 = m$ = 1 кг сполучено невагомою ниткою перекинутої через невагомий блок, укріплений на вершині похилої площини з кутом нахилу 30°. Знайти прискорення a гирь і силу натягнення нитки T.

2.5 При горизонтальному польоті із швидкістю V=250 м/с снаряд масою m=8 кг розірвався на дві частини. Велика частина масою m_1=6 кг одержала швидкість U_1=400 м/с у напрямі польоту снаряда. Визначити модуль і напрям швидкості U_2 меншої частини снаряда.

2.6 При вертикальному підйомі вантажу масою m = 2 кг на висоту h = 1 м з постійною силою F була виконана робота A = 80 Дж. З яким прискоренням піднімали вантаж? Прийняти g=10м/с^2

2.7 Вагон масою 20 т, що рухається рівносповільнено під дією сили тертя 6000 Н, через якийсь час зупиняється. Початкова швидкість вагону дорівнює 54 км/г. Знайти: 1) роботу сили тертя, 2) відстань, пройдена вагоном до зупинки.

2.8 З похилої площини висотою 0,5 м і довжиною 1 м зсковзує тіло масою 3 кг. Тіло приходить до основи площини із швидкістю 2,45 м/с. Знайти: 1) коефіцієнт тертя тіла об площину, 2) кількість теплоти, що виділилася в цьому русі. Початкова швидкість тіла дорівнює нулю.

2.9 Атом розпадається на дві частини масами $m_1=1,6\cdot10^{-25}$ кг і $m_2=2,3\cdot10^{-25}$ кг. Визначити кінетичні енергії T_1 і T_2 частин атома, якщо їх загальна кінетична енергія $T=2,2\cdot10^{-11}$ Дж. Кінетичною енергією і імпульсом атома до розпаду нехтувати.

2.10 Визначити роботу розтягування двох сполучених послідовно пружин жорсткостями k_1=400 Н/м і k_2=250 Н/м, якщо перша пружина при цьому розтягнулася на Δl=2 см.

2.11 Вагон масою m=35 т рухається на упор із швидкістю v=0,2 м/с. При повному гальмуванні вагону буферні пружини стискаються на Δl= 12 см. Визначити максимальну силу F_{max} стиснення буферних пружин і тривалість Δt гальмування.

2.12 Пружину жорсткістю k =500 Н/м стиснули силою F=100 Н. Визначити роботу А зовнішньої сили, що додатково стискає цю пружину ще на $\Delta x = 2$ см.

2.13 Вагон масою $m = 2\cdot10^4$ кг, рухаючись із швидкістю V=0,5 м/с, ударяється в два нерухомі пружинні буфери. Знайти найбільше стиснення буферів, якщо буфер стискається на 1 см при дії сили в $5\cdot10^4$Н.

2.14 З пружинного пістолета з пружиною жорсткістю до =150 Н/м був проведений постріл кулею масою m=8 р. Визначити швидкість V кулі при вильоті її з пістолета, якщо пружина була стисла на Δx=4 см.

2.15 Із ствола автоматичного пістолета вилетіла куля масою m_1=10 г із швидкістю v=300 м/с. Затвор пістолета масою m_2=200 г притискається до стовбура пружиною, жорсткість якої k=25 кН/м. На яку відстань відійде затвор після пострілу? Вважати, що пістолет жорстко закріплений.

2.16 Камінь, пущений по поверхні льоду із швидкістю v = 2 м/с, пройшов до повної зупинки відстань 20,4 м. Знайти коефіцієнт тертя каменю по льоду, вважаючи його постійним.

2.17 По невеликому шматку м'якого заліза, що лежить на ковадлі масою m_1=300 кг, ударяє молот масою m_2=8 кг. Визначити КПД η удару, якщо удар не пружний. Корисної рахувати енергію, що затрачує на деформацію шматка заліза.

2.18 Вантаж масою m = 1 кг падає на чашку терезів з висоти h = 10 см Які показання терезів F в момент удару, якщо після заспокоєння коливань, чашка опуститься на x_0 = 10 см?

2.19 Камень, прив'язаний до вірьовки, рівномірно обертається в вертикальній площині. Знайти його масу, якщо різниця між максимальною і мінімальною силами натягування вірьовки ΔF = 10 Н.

2.20 Гирька масою m = 50 г обертається в горизонтальній площині на нитці довжиною *l* = 25 см. Частота обертання n = 2 об/с. Знати силу натягування нитки.

2.21 Через блок, закріплений на краю гладкого стола, перекинута вірьовка, до кінців якої прив'язані два тіла масами m_1 і m_2. Тіло масою m_1 знаходиться на поверхні стола, а тіло масою m_2 висить вертикально. Стіл рухається вгору з прискоренням a_0. З яким прискоренням біде рухатися тіло масою m_2 ?

2.22 Тіло масою m = 1 кг під дією постійної сили рухається прямолінійно. Залежність шляху, що проходить тіло, від часу задана рівнянням $s = 2t^2 + 4t + 1$. Визначити роботу сили за t = 10 с від початку її дії і залежність кінетичної енергії від часу.

Контрольні запитання

1 Сформулювати перший закон Ньютона.
2 В чому полягає закон інерції?
3 Які системи відліку називають інерціальними?

4 Сформулювати другий закон Ньютона для матеріальної точки і поступального руху твердого тіла.
5 В якому випадку при розв'язуванні задач можна використовувати другий закон Ньютона?
6 Як знайти величину прискорюючої сили, що діє на матеріальну точку, якщо відомий закон зміни її прискорення?
7 Сформулювати третій закон Ньютона, пояснити його.
8 Які сили називаються зовнішніми?
9 Які сили називаються внутрішніми?
10 Що називають центром мас (центром інерції) механічної системи?
11 В якому випадку при вивченні руху механічної системи достатньо розглянути рух тільки рух її центра мас?
12 Під дією яких сил здійснюється рух з постійним прискоренням?
13 Що називають вагою тіла?
14 В якому випадку вага тіла чисельно дорівнює силі тяжіння?
15 На яку тіло діє вага, а на яке .-. сила тяжіння , коли вантаж підвішений на нерозтяжній нитці?
16 Чому дорівнює сума всіх внутрішніх сил, що діють на систему тіл?
17 Що називають імпульсом тіла?
18 Сформулювати закон збереження імпульсу і пояснити його зв'язок з однорідністю простору.
19 Що називається імпульсом сили?
20 Пояснити, що таке механічна робота?
21 Як визначається робота змінної сили?
22 Що називається потужністю?
23 Яка енергія називається кінетичною?
24 Яку енергію називають потенціальною?
25 За якими формулами визначається потенціальна енергія ?
26 З чого складається повна механічна енергія тіла і системи тіл?
27 Який зв'язок існує між потенціальною енергією матеріальної точки в зовнішньому силовому полі і силою, що діє на матеріальну точку?
28 Які силові поля називають центральними?
29 Що називають напруженістю гравітаційного поля?
30 Що таке потенціал гравітаційного поля?
31 Який зв'язок існує між потенціалом і напруженістю в даній точці поля?
32 Сформулювати закон збереження механічної енергії. Пояснити його зв'язок з однорідністю часу.
33 Яке зіткнення двох тіл називають абсолютно пружним?
34 Які закони збереження виконуються при абсолютно пружному зіткненні?
35 Яке зіткнення двох тіл називають абсолютно непружним?
36 Які із законів збереження в механіці виконуються при непружному зіткненні?
37 Як виконується закон збереження енергії в цьому випадку?

38 Що таке дисипація енергії?
39 Які механічні системи є дисипативними?

1.3 Динаміка обертального руху твердого тіла.

Основні поняття та формули

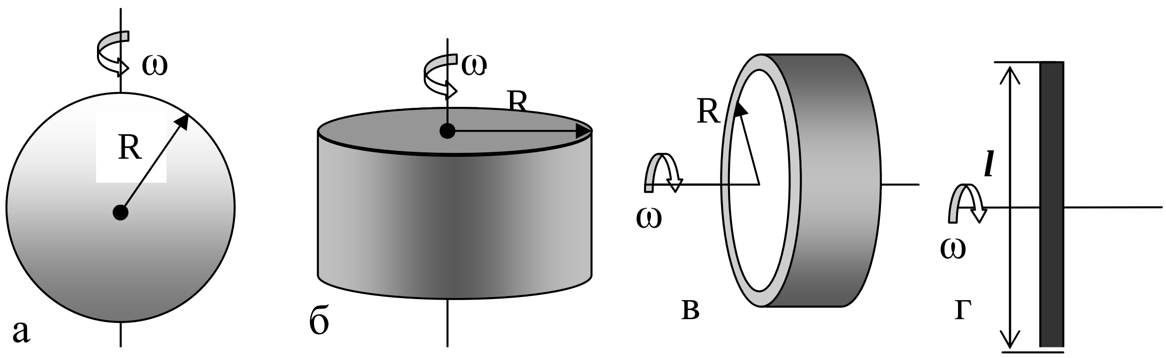
Дія сили в обертальному русі твердого тіла залежить не тільки від величини та напрямку дії сили але і від положення лінії дії сили відносно осі обертання. Для визначення обертальної дії сили вводиться фізична величина - момент сили. Величина моменту сили визначається добутком проекції сили на площину, перпендикулярну до осі обертання, на найкоротшу відстань між лінією дії сили та віссю обертання (плече сили):

$$M_z = F_z l.$$

Знак моменту сили визначається за домовленістю. Наприклад, якщо момент призводить до обертання проти стрілки годинника – він додатній, якщо за стрілкою - від'ємний.

Інертність твердого тіла в обертальному русі навколо осі визначається моментом інерції. Момент інерції залежить від маси тіла, його форми і положення осі обертання. Інертність тіла при обертанні залежить від розташування частин тіла відносно осі обертання:

$$J_z = \int\limits_{(V)} dmr^2.$$



$J_z = \frac{3}{5} mR^2$ $\quad$ $J_z = \frac{1}{2} mR^2$ $\quad$ $J_z = mR^2$ $\quad$ $J_z = \frac{1}{12} ml^2$

Рисунок 3.1

На рис.3.1 визначені моменти інерції різних однорідних тіл масою *m* відносно осі симетрії z, що проходить через центр мас :

а) кулі радіусом R, масою m; б) диска радіусам R та масою m; в) обруча (тонкостінного циліндра) радіусом R та масою m відносно осі, перпендикулярної до площини обруча (що збігається з віссю циліндра); г) стрижня довжиною l та масою m відносно осі, перпендикулярної стрижню що проходить через його середину.

Момент інерції тіл відносно осей, що не проходять через центр мас тіла визначаються за теоремою Штейнера:

$$J_z = J_{z0} + md^2,$$

де J_{z0} – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас паралельно до даної осі;

d – відстань між осями.

Динамічною характеристикою тіла в обертальному русі замість імпульсу є момент імпульсу:

$$L_z = J_z \omega,$$

де ω - кутова швидкість тіла;

J_z, - момент інерції відносно осі z.

Основне рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі z стверджує, що кутове прискорення, отримане твердим тілом в обертальному русі навколо осі прямо пропорційне результуючому моменту зовнішніх сил, прикладених до тіла і обернено пропорційне моменту інерції тіла відносно цієї ж осі:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{N} M_{zi}}{J_z};$$

де $M_z = \sum_{i=1}^{N} M_{zi}$ - результуючий момент зовнішніх сил, що діють на тіло відносно осі z,;

ε - кутове прискорення;

J_z - момент інерції тіла відносно осі обертання;

Закон динаміки для обертального руху;

$$M_z = j_z \varepsilon,$$

$$M_z = \frac{d(J_z \omega)}{dt} = \frac{dL_z}{dt},$$

де $L_z = J_z\omega$ – момент імпульсу тіла відносно даної осі обертання.

Якщо на тіло або систему тіл не діють моменти зовнішніх сил відносно даної осі або їх сума дорівнює нулю, то має місце закон збереження моменту імпульсу:

$$L_z = const \;; \quad J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

де J_1, ω_1 і J_2, ω_2 - моменти інерції системи тіл і відповідні їм кутові швидкості обертання в моменти часу, прийняті за початковий і кінцевий.

Робота повороту твердого тіла навколо осі визначається за формулою:

$$A = \int\limits_{(\varphi)} M_z d\varphi$$

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо осі:

$$T = \frac{J_z\omega^2}{2}.$$

Якщо тіло, крім обертання, приймає участь у поступальному русі, то за принципом суперпозиції кінетична енергія визначається за формулою:

$$T = \frac{J_z\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2},$$

де V – швидкість руху центра мас тіла.

Методичні вказівки та приклади розв’язання задач з теми «Динаміка обертання твердого тіла»

Нагадуємо, що розв’язок задач з фізики відбувається за певним алгоритмом, про який йшла мова в попередньому розділі, де розглядається розв’язання задач динаміки поступального руху.

Відповідно до нього, читання умови задачі можна вважати закінченим, якщо ви зрозуміли про яке тіло або про які тіла йде мова і чи можна вважати ці тіла абсолютно твердими. На рисунку, як правило, зображається досліджуване тіло (або тіла) та вказуються всі сили, що діють на нього.

Фізичний розв’язок задачі зводиться до вибору системи відліку і, якщо вона інерціальна (як правило пов’язана з Землею), то записати відповідний основний закон динаміки. У нашому випадку – це основний закон динаміки обертального руху навколо фіксованої осі обертання Для заміни векторних рівностей скалярними вибираємо осі проектування: одна, як правило, повздовж прискорення (або швидкості) руху інша – перпендикулярна до нього. Якщо кількість отриманих рівнянь відповідає кількості невідомих, можна приступати до алгебраїчного розв’язку задачі, який закінчується отриманням розрахункової формули, та перевірки розмінностей і запису результату дослідження. Якщо кількість невідомих перевищує кількість рівнянь, читайте уважно ще раз умову задачі для пошуку допоміжних зв’язків між величинами або відомих їх значень.

Якщо є можливість скористатись законами збереження моменту імпульсу та механічної енергії, або скористатись поняттями роботи та потужності, необхідно провести аналіз моментів сил з метою з’ясування чи є система тіл замкненою та консервативною, чи зберігається енергія окремих тіл системи і таке інше.

Приклад 3.1. До обода однорідного диска радіусом R = 0,2 м прикладена постійна сила F =98,1 Н, що діє по дотичній. Під час обертання на диск діє момент сил тертя $M_{тр}$ = 4,9 Н·м. Знайти масу m диска, якщо відомо, що він обертається з кутовим постійним прискоренням ε = 100 рад/с^2.

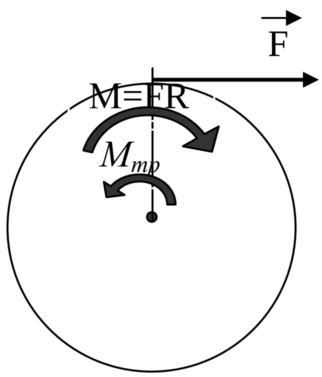


Рисунок 3.2

Розв’язання. Розвязок задачі виконуємо в системі відліку, повязаною з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною. Диск виконує обертальний рух під дією моменту сили F: M=FR та моменту сили тертя $M_{тр}$ (див. рис. 3.2), які діють в протилежних напрямках. За основним законом динаміки обертального руху навколо осі маємо:

$$\varepsilon = \frac{FR - M_{тр}}{J}, \qquad (3.1)$$

де $J = \frac{1}{2}mR^2$ - момент інерції диска.

Таким чином, підставивши вираз для моменту інерції однорідного диска в вираз (3.1), одержимо:

$$\varepsilon = \frac{2(FR - M_{mp})}{mR^2}, \tag{3.2}$$

звідки виразимо масу диска

$$m = \frac{2(FR - M_{mp})}{\varepsilon R^2}.$$

Перевіримо одержану формулу розмірністю:

$$[m] = \frac{(Нм - Нм)c^2}{м^2} = \frac{кгм^2c^2}{c^2м^2} = кг.$$

Виконаємо розрахунки:

$$m = \frac{2(98{,}1 \cdot 0{,}2 - 4{,}9)}{100 \cdot (0{,}2)^2} = 12{,}2(кг).$$

Відповідь: m = 12,2 кг.

Приклад 3.1. Дві гирі масами m_1 = 3 кг та m_2 = 2 кг з'єднані ниткою та перекинуті через блок (рис.3.3). Радіус блока R = 15 см, а його маса m =2 кг. Знайти: 1) прискорення a, з яким рухаються гирі; 2) сили натягу нитки T_1 та T_2, до якої прив'язані гирі.

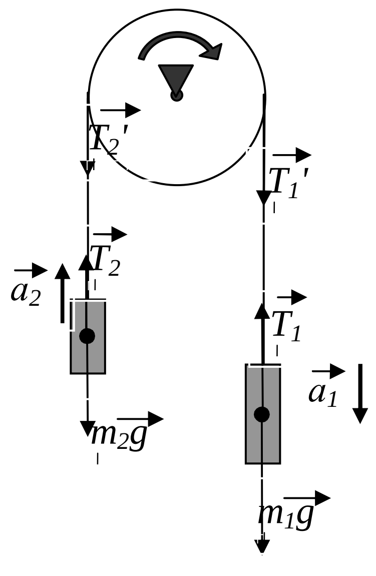


Рисунок 3.3

Розв'язання. Розвязок задачі виконуємо в системі відліку, повязаною з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною. Гирі виконують поступальний рух і можуть вважатись матеріальними точками. Для них за другим законом Ньютона:

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1;$$
$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2 \qquad (3.3)$$

Диск здійснює обертальний рух під дією моментів сил T_1' та T_2'.

З рис. 3.3 моменти сил діють в протилежних напрямках:

$$M=(T_1'R- T_2'R) = (T_1'- T_2')R.$$

За основним законом динаміки обертального руху навколо осі маємо:

$$(T_2' - T_2')R = J\varepsilon, \qquad (3.4)$$

де $J = \frac{1}{2}mR^2$ - момент інерції диска;

Після проектування рівностей (3.3) на напрямки відповідних прискорень та з врахуванням рівності модулів їх прискорень $a_1=a_2=a$, отримаємо:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a;$$
$$-m_2 g + T_2 = m_2 a. \qquad (3.5)$$

Виходячи з того, що повздовж невагомої нитки з кожного боку сили натягу нитки однакові $T_2' = T_2$ та $T_1' = T_1$, і, крім того, завдяки тому, що нитка не ковзає по блокові, тангенціальне прискорення зовнішніх точок блока дорівнює лінійному прискоренню гир:

$$a_\tau = a = \varepsilon R.$$

Звідси кутове прискорення дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Зважаючи на останнє співвідношення та на вираз для моменту інерції блока, з врахуванням співвідношень (3.5) маємо вираз:

$$(T_1 - T_2)R = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R}.$$

Звідки виразимо різницю сил натягування:

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} ma \ . \tag{3.6}$$

$$(m_1 - m_2)g = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m \right) a \tag{3.7}$$

.

Отже прискорення дорівнює:

$$a = g \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} .$$

Визначимо величину прискорення:

$$a = 9{,}81 \frac{3 - 2}{3 + 2 + 1} = 1{,}63 \left(\frac{м}{с^2} \right).$$

Сили натягування ниток визначимо із співвідношень (3.5):

$$T_1 = m_1 (g - a);$$

$$T_2 = m_2 (a + g).$$

Перевіримо розмірність:

$$[T_1] = [T_2] = кг \ \frac{м}{с^2} = \ Н \ .$$

Підставивши значення величин, одержимо:

$$T_1 = 3(9{,}81 - 1{,}63) = 24{,}5(Н); \ T_2 = 2(9{,}81 + 1{,}63) = 22{,}9(Н).$$

Відповідь: a = 1,63 м/с^2; T_1 = 24,5 Н; T_2=22,9 Н.

Приклад 3.3. Диск масою m = 2 кг котиться без ковзання по горизонтальній площині (рис. 3.4) з швидкістю V = 4 м/с. Визначити його кінетичну енергію.

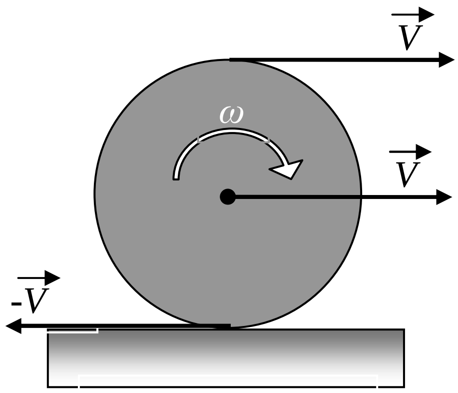


Рисунок 3.4

Розв'язання. Розв'язок задачі виконуємо в системі відліку, повязаною з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною системою відліку. Отже всі співвідношення теорії мають місце при розвязку задачі.

Кінетична енергія диска складається з енергії поступального руху і енергії його обертального руху:

$$T_п = \frac{mV^2}{2} \quad , \quad T_{об} = \frac{J\omega^2}{2},$$

де $J = \frac{mR^2}{2}$ − момент інерції диска відносно осі обертання, що проходить через центр диска і перпендикулярна до його поверхні;

$\omega = \frac{V}{R}$ – кутова швидкість обертання диска навколо даної осі.

В системі відліку, повязаній з центром обертання, лінійна швидкість точок поверхні диска за модулем дорівнює швидкості диска відносно поверхні площини, по якій він рухається (див. рис. 3.4).

Таким чином, за принципом суперпозиції, кінетична енергія диска:

$$T = T_п + T_{об} = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + \frac{mR^2V^2}{4R^2} = \frac{3mV^2}{4}.$$

Перевіривши розмірність і підставивши задані величині визначимо кунетичну енергію диска, що котиться:

$$[T] = \frac{кгм^2}{c^2} = Дж. \; ; \; T = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4^2}{4} = 24(Дж)$$

Відповідь: T= 24 Дж.

Приклад 3.4 Горизонтальна платформа масою M = 100 кг обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи, і виконує 10 об/хв. Хлопчик масою m = 50 кг стоїть при цьому на краю платформи (рис. 3.5). З якою кутовою швидкістю почне обертатись платформа, якщо хлопчик перейде у центр платформи? Яка при цьому буде хлопчиком виконана робота? Вважати платформу однорідним диском, а хлопчика вважати точковою масою.

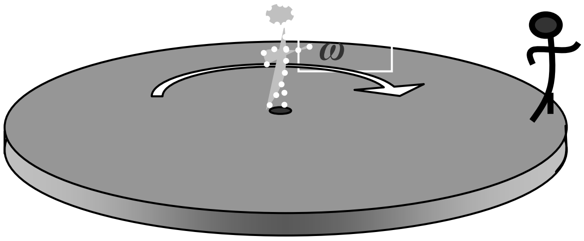


Рисунок 3.5

Розв'язання. Розв'язок задачі виконуємо в системі відліку,
пов'язаною з Землею, яка в достатній мірі може вважатись інерціальною, тому всі співвідношення теорії мають місце при розв'язку задачі. Зовнішні сили, що діють на тіла розглядуваної системи – сили тяжіння та сили реакцій опору направлені паралельно до осі оертання диска, тому їх момети відносно цієї осі дорвнюють нулю, а тому результуючий момент імпульсу системи тіл: «платформа - хлопчик» зберігається:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \tag{3.8}$$

де J_1 - момент інерції платформи разом з хлопчиком на початку руху;

ω_1 –кутова швидкість обертання платформи з хлопчиком;

J_2 - момент інерції платформи разом з хлопчиком на кінець розгляду руху;

$\omega_2 = \omega$ – їх кутова швидкість обертання на кінець розгляду руху.

Враховуючи, що сумарний момент інерції платформи разом з хлопчиком на початку дорівнює

$$J_1 = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2, \tag{3.9}$$

а на кінець руху

$$J_2 = \frac{1}{2}MR^2, \tag{3.10}$$

а також кутову швидкість

$$\omega_1 = 2\pi n, \tag{3.11}$$

одержимо:

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\cdot 2\pi n = \frac{1}{2}MR^2\omega.$$

Виразимо кутову швидкість:

$$\omega = 4\pi n \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2} = 4\pi n\left(1 + \frac{2m}{M}\right).$$

Визначимо числове значення кутової швидкості:

$$\omega = 4\pi\frac{1}{6}\left(1 + \frac{2\cdot 50}{100}\right) = 1{,}33\pi(рад/с).$$

Робота, яку виконує хлопчик за рахунок своїх зусиль (що є внутрішніми силами) під час руху до центру, йде на зміну кінетичної енергії системи:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{j_2\omega^2}{2} - \frac{j_1\omega_1^2}{2}.$$

З врахуванням формул (3.9), (3.10), (3.11) одержимо:

$$A = \frac{\frac{1}{2}MR^2\omega^2}{2} - \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{2}\cdot 4\pi^2 n^2;.$$

$$A = \left[M\omega^2 - (M + 2m)\pi^2 n^2\right]R^2.$$

Проведемо розрахунки:

$$A = 100\cdot(1{,}33\pi)^2 - (100 + 2\cdot 50)\pi^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = 1{,}70\cdot 10^3(Дж).$$

Відповідь: ω = 1,33π рад/с; А = 1,70·10^3 Дж = 1,70 кДж.

Приклад 3.5 . Однорідний стрижень довжиною l =1 м і масою М = = 0,7 кг може вільно обертатися навколо вертикальної осі, що проходить через один з його кінців. В точку, віддалену від осі на $l_1 = (2/3)l$, абсолютно пружно ударяється куля масою m = 5 г, яка летить перпендикулярно стрижню і його осі (рис. 3.6). Після удару стрижень відхилився на кут α=60°. Визначити швидкість кулі.

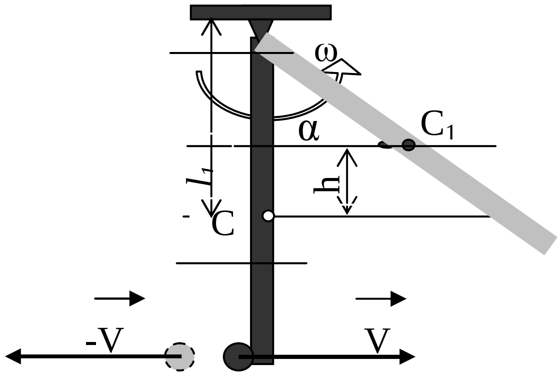


Рисунок 3.6

Розв'язання. Розв'язок задачі виконуємо в системі відліку, пов'язаною з Землею, яку в достатній мірі можна вважати інерціальною. Всі співвідношення теорії мають місце при розв'язку задачі.

Зовнішні сили, що діють на тіла системи – сили тяжіння та сили реакцій опору в точці підвісу під час зіткнення кулі з стрижнем не створюють обертальних моментів відносно осі обертання. Куля летить горизонтально, що є вказівкою на те, що її силою тяжіння нехтуємо. Тому результуючий момент імпульсу системи тіл «куля-стрижень» зберігається:

$$mV\cdot\frac{2}{3}l=-mV\cdot\frac{2}{3}l+J\omega, \qquad (3.12)$$

де $J\omega-$ момент імпульсу стрижня після удару кулі;

ω – кутова швидкість стрижня після удару кулі.

В рівнянні (3.12)враховано, що момент імпульсу кулі після абсолютно пружного удару дорівнює $-mV\cdot\frac{2}{3}l$ (т.т зміниться на протилежний); співвідношення мас кулі та стрижня m/M= 5/700 ≤ 1.

Момент інерції стрижня відносно осі, що проходить через кінець стрижня визначається за формулою:

$$J=\frac{1}{3}Ml^2. \qquad (3.13)$$

Таким чином з виразу (3.12) маємо:

$$\frac{4}{3}mVl = \frac{1}{3}Ml^2\omega,$$

звідки виразимо кутову швидкість:

$$\omega = \frac{4mV}{Ml}. \tag{3.14}$$

Рух стрижня після удару відбувається за інерцією, а єдиною силою, яка виконує роботу є його сила тяжіння. Так як сила тяжіння є потенціальною силою, то механічна енергія стрижня після удару зберігається:

$$E_1 = E_2;.$$

$$\frac{j\omega^2}{2} = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha). \tag{3.15}$$

З врахуванням виразу (3.14) для кутової швидкості стрижня та виразу для обчислення моменту інерції стрижня (3.13), маємо:

$$\frac{Ml^2(4mV)^2}{3\cdot 2(Ml)^2} = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha);$$

$$(4mV)^2 = 3M^2gl(1-\cos\alpha);$$

$$V = \frac{M}{4m}\sqrt{3gl(1-\cos\alpha)};$$

Розмірність швидкості:

$$[V] = \frac{кг}{кг}\sqrt{\frac{м}{с^2}м} = \frac{м}{с}.$$

Вирахуємо числове значення швидкості кулі:

$$V = \frac{0{,}700}{4\cdot 0{,}005}\sqrt{3\cdot 9{,}81\cdot 1\cdot(1-\cos 60^\circ)} = 134\left(м/_с\right).$$

Відповідь: V = 134 м/с.

Задачі для закріплення теорії і навичок їх розв'язання.

3.1 Стрижень обертається навколо осі, що проходить через його середину згідно рівнянню $\varphi = At + Bt^3$, де A=2 рад/с; B = 0,2 рад/с^3. Визначити момент імпульсу стрижня L і обертальний момент M, діючий на стрижень через t=2 с після початку обертання, якщо момент інерції стрижня $J = 0{,}048$кг·м^2.

3.2 Блок, що має форму диска масою m = 0,4 кг, обертається під дією сили натягу нитки, до кінців якої підвішені вантажі масами m_1=0,3 кг і m_2=0,7 кг. Визначити прискорення руху вантажів і сили T_1 і T_2 натягу нитки по обидві сторони блоку.

3.3 По дотичній до шківа маховика у вигляді диска діаметром D=75 см і масою m = 40 кг прикладена сила F =1 кН. Визначити кутове прискорення ε і частоту обертання маховика n через час t = 10 с після початку дії сили, якщо радіус r шківа рівний 12 см. Силою тертя нехтувати.

3.4 Визначити швидкість поступального руху суцільного циліндра, що скотився з похилої площини заввишки h =20 см.

3.5 По плоскій горизонтальній поверхні котиться диск із швидкістю V =8 м/с. Визначити коефіцієнт опору, якщо диск, будучи наданим самому собі, зупинився, пройшовши шлях S= 18 м.

3.6 На барабан радіусом R=20 см намотаний шнур, до кінця якого прив'язана гиря массою m = 0,5 кг. До початку обертання барабана вона знаходилася над підлогою на висоті h =1 м.Через який час гиря опуститься на підлогу і яку віна матиме при цьому кінетичну енергію?

3.7 У підвішений на нитці завдовжки l=1,8 м дерев'яний шар масою m_1=8кг потрапляє куля масою m_2 =4 г, що летить горизонтально. З якою швидкістю летіла куля, якщо нитка з шаром і застряглою в ньому кулею відхилилася від вертикалі на кут α =3°? Розміром кулі нехтувати. Удар кулі вважати прямим, центральним..

3.8 Кулька масою m=60 г, прив'язана до кінця нитки завдовжки l_1=1,2 м, обертається з частотою n_1=2 с$^{-1}$, спираючись на горизонтальну площину. Нитка коротшає, наближаючи кульку до осі обертання на відстань l_2=0,6 м. З якою частотою n_2 при цьому обертатиметься кулька? Яку роботу А виконує зовнішня сила укорочуючи нитку? Тертям кульки об площину знехтувати.

3.9 Кулька масою 0,5 кг котиться зі швидкістю 10 см/с без ковзання, вдаряється об стіну і відскакує від неї. Швидкість кульки після удару 8 см/с. Знайти кількість Q теплоти, що виділилася в момент удару?

3.10 Знайти лінійні швидкості центрів мас кулі, диска і обруча, які скочуються без сковзання з похилої площини, висота якої h = 0,5 м. Початкова швидкість всіх тіл дорівнює нулю.

Контрольні запитання

1 Який рух абсолютно твердого тіла називається обертальним рухом навколо нерухомої осі?

2 Що називається моментом інерції матеріальної точки відносно заданої осі?

3 Як визначають момент інерції тіла відносно будь-якої осі? Від чого залежить момент інерції тіла?

4 Чому дорівнює момент інерції суцільного однорідного диска відносно осі, що проходить через центр мас?

5 Чому дорівнює момент інерції тонкостінного циліндра і обруча відносно осі, що проходить через центр мас?

6 Чому дорівнює момент інерції суцільного однорідної кулі відносно осі, що проходить через центр мас?

7 Чому дорівнює момент інерції суцільного однорідного стрижня відносно осі, що проходить через його середину?

8 Як визначити момент інерції тіла відносно осі, що не проходить через центр мас?

9 Що називається моментом сили відносно точки?

10 Що називається моментом сили відносно осі?

11 Як визначити величину моменту сили?

12 Як визначити напрямок моменту сили?

13 Що таке момент імпульсу матеріальної точки відносно точки?

14 Як визначається момент імпульсу тіла відносно нерухомої осі?

15 Чому дорівнює швидкість зміни моменту імпульсу тіла, що обертається навколо нерухомої точки?

16 Сформулювати основний закон динаміки обертального руху.

17 Який вигляд має рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі?

18 В якому випадку момент зовнішніх сил вважається додатнім?.?

19 Як визначається робота, яка виконується зовнішньою силою при обертання тіла?

20 Як визначити роботу за проміжок часу від t_1 до t_2, якщо величина моменту сили, що діє на тіло, змінюється?

21 Записати закон збереження моменту імпульсу відносно нерухомої точки?

22 Сформулювати закон збереження моменту імпульсу відносно нерухомої осі..

23 Пояснити зв’язок закону збереження моменту імпульсу з ізотропністю простору.

24 Як визначається кінетична енергія тіла, що обертається?

25 Як визначити кінетичну енергію твердого тіла, яке рухається поступально і одночасно обертається?

2 МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКАТА ТЕРМОДИНАМІКА

2.1 Основи молекулярної фізики.

Основні поняття і формули

Для розгляду найбільш загальних властивостей термодинамічних систем вводиться ідеалізація - ідеальний газ, - термодинамічна система, що має найбільш характерні властивості притамовані газовому стану речовини. В найбільш загальному випадку вважається, що це система матеріальних точок, між якими виключені сили взаємодії.

Для суміші ідеальних газів справедливий закон Дальтона: тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків газів, що входять до суміші:

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n .$$

Парціальним тиском p_i називається тиск, що його чинив би і-тий ідеальний газ суміші, якби він сам займав об’єм посудини. Цей закон є відображенням принципу суперпозиції, принципу незалежності дії сил.

Дослідні газові закони отримані експериментально для, так званих, ізопроцесів.

Ізотермічний процес підкоряється закону Бойля-Маріотта, який стверджує, що для постійної маси ідеального газу за сталої температури добуток тиску на об’єм залишається незмінним:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 .$$

Ізобаричний (ізобарний) процес підкоряється закону Гей - Люссака: для постійної маси ідеального газу і постійному тиску об’єм зростає прямо пропорційно до зростання температури:

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t),$$

де $\alpha = \frac{1}{273} \frac{1}{^\circ C}$ – температурний коефіцієнт, сталий для всіх ідеальних газів;

V_0 – об’єм газу при нулі градусів температури за Цельсієм.

Якщо ввести абсолютну температуру T= t+273 K, то закон Гей-Люссака перепишеться в компактній формі:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Ізохоричний (ізохорний) процес підкоряється закону Шарля: для постійної маси ідеального газу при постійному об’ємі тиск зростає прямо пропорційно до зростання температури:

$$p_t = p_0(1 + \alpha t),$$

де $\alpha = \frac{1}{273}\frac{1}{^\circ C}$ – температурний коефіцієнт, сталий для всіх ідеальних газів;

p_0 – тиск газу при нулі градусів температури за Цельсієм.

Якщо ввести абсолютну температуру T= t+273 K, то закон Шарля перепишеться в компактній формі:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Скориставшись дослідними газовими законами, можна отримати об’єднаний газовий закон, що стверджує: для постійної маси ідеального газу добуток тиску на об’єм віднесений до абсолютної температури залишається незмінним в довільних процесах:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Рівняння стану довільної маси ідеального газу зв’язує параметри його стану:

$$PV = \frac{m}{M} RT = \nu RT,$$

де p - тиск;

V - об’єм;

T - температура;

m - маса;

M - молярна маса газу;

ν - кількість молів газу;

R - універсальна газова стала.

Одночасно вводиться стала Больцмана:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К},$$

яка широко використовується в молекулярній фізиці.

Рівняння стану (2.7) може бути переписане в інших формах призначених для визначення конкретних характеристик:

а) для густини речовини –

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT};$$

б) для концентрації молекул –

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\nu N_A}{kT} \Rightarrow n = \frac{p}{kT} \Rightarrow p = nkT .$$

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії {[10], (5.15)} приймає форму:

$$pV = \frac{1}{3} nmV_{кв}^2 = \frac{2}{3} n \frac{mV_{кв}^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle,$$

де $\frac{mV_{кв}^2}{2} = \langle \varepsilon \rangle$ - середня кінетична енергія поступального руху молекул.

Основне рівняння м.к.т. дає можливість тлумачити фізичний зміст термодинамічних параметрів.

Дійсно тиск ідеального газу визначається середньою енергією руху молекули та концентрацією молекул.

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle,$$

Скориставшись рівнянням стану ідеального газу отримаємо співвідношення для тлумачення температури:

$$p = nkT = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle,$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Абсолютна температура є мірою середньої кінетичної енергії поступального руху молекул тіла (термодинамічної системи).

Стала Больцмана k є коефіцієнтом пропорціональності між температурою і середньою кінетичною енергією поступального руху молекул

Абсолютна температура встановлює співвідношення між джоулем і кельвіном.

Скориставшись визначенням кінетичної енергії молекули та одержаним співвідношенням отримаємо вираз для середньої квадратичної швидкості:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{mV_{кв}^{2}}{2} = \frac{3}{2}kT \ ,$$

$$V_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Одним із фундаментальних положень класичної теорії є теорема про рівномірний розподіл енергії термодинамічної системи за ступенями вільності.

Під ступенями вільності розуміють кількість незалежних координат, необхідних для визначення положення тіла в просторі.

Теорема стверджує, що на довільну ступінь вільності тіла в середньому приходиться одна і та сама енергія:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2}kT \ ,$$

де $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \dfrac{Дж}{К}$ - стала Больцмана.

В ідеальному газі відсутні сили взаємодії між молекулами. Тому внутрішня енергія ідеального газу складається тільки з кінетичної енергії руху його молекул:

$$U = N \cdot \langle \varepsilon \rangle = N \frac{i}{2}kT \ ,$$

де N - кількість молекул;

i - число ступенів вільності поступального, обертального і коливального рухів його молекул,

$$i = i_{поступ} + i_{оберт} + 2i_{колив} \ .$$

Внутрішні коливання атомів в молекулах ідеального газу включають кінетичну і потенціальну енергії, тому при врахуванні ступенів вільності багатоатомних молекул кількість коливальних ступенів вільності подвоюється.

Моль речовини має $N = N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ молекул, тому внутрішня енергія моля ідеального газу

$$U_M = N_A \frac{i}{2} kT .$$

Добуток $N_A k = R = 8{,}31 \,{}^{Дж}\!/_{моль}$ має назву універсальної газової сталої, тоді

$$U_M = \frac{i}{2} RT ,$$

а внутрішня енергія довільної маси газу дорівнює:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT .$$

Методичні вказівки та приклади розв'язання задач з теми: «Молекулярна фізика, стан та закони ідеальних газів»

При розв'язуванні задач на дослідження станів та поведінки ідеальних газів необхідно впевнитись і зробити запис про те, що досліджуваний газ або суміш газів можуть вважатись ідеальними. Основою для дослідження суміші газів є закон Дальтона.

Для окремих газів необхідно з'ясувати про що йде мова в задачі: чи про дослідження параметрів стану, чи про дослідження протікання певного процесу.

Якщо досліджується стан термодинамічної системи, то записується відповідне рівняння стану ідеальних газів звідки знаходиться відповідний параметр. Стан газу, як термодинамічної системи, задається термодинамічними параметрами, основні з яких: температура Т, тиск p, маса m, μ- молярна маса, об'єм V. Ці параметри пов'язані рівнянням Клайперона – Мендєлєєва – основним рівнянням стану ідеального газу і по заданим чотирьом параметрам можна знайти п'яту величину.

Якщо йде мова про газовий процес, то необхідно з'ясувати: з постійною масою газу він відбувається чи із змінною. Якщо маса газу змінна, то записується двічі відповідне рівняння стану; якщо маса газу постійна, то необхідно вияснити який це ізопроцес та записати до нього відповідний газовий закон.

В умові деяких задач задаються показання технічних манометрів. Вони вимірюють не повний тиск газу в балоні, а надлишковий над атмосферним. Тому повний тиск газу в балоні дорівнює показанню манометра збільшеному на $p_{атм}$.

Приклад 4.1. Який об'єм займають 10 г кисню при тиску 750 мм рт.

ст. та температурі 20°С.

Розв'язання. В задачі йде мова про визначення параметра стану ідеального газу.

Запишемо рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{M} RT , \qquad (4.1)$$

де p = 750·133,3 Н/м^2 – тиск кисню;
m = 10^{-2} кг;
M = 32·10^{-3} кг/моль – молярна маса кисню;
R = 8,31 Дж/мольК – універсальна газова стала;
T = 293 К – температура кисню.

З рівняння (4.1)визначимо об'єм кисню:

$$V = \frac{m}{pM} RT$$

Перевіримо розмірність об'єму:

$$[V] = \frac{кгм^2 моль}{Нкг} \frac{Дж}{мольК} К = м^3 .$$

Підставимо значення заданих величин і виконаємо обчислення:

$$V = \frac{10^{-2}}{750 \cdot 133,3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 293 = 7,6 \cdot 10^{-3} (м^3).$$

Відповідь: V=7,6·10^{-3}м^3.

Приклад 4.2. Азот масою 5 г, що знаходиться в закритій посудині об'ємом 4 л при температурі 20°С, нагрівається до температури 40°С. Знайти тиск до та після нагрівання.

Розв'язання. В задачі йде мова про визначення параметрів стану ідеального газу.

Запишемо рівняння стану ідеального газу – це рівняння Клайперона-Мендєлєєва:

$$pV = \frac{m}{M} RT ,$$

де M = 28·г/моль – молярна маса азоту;

R = 8,31 Дж/мольК – універсальна газова стала;
$V=4\cdot10^{-3}$ м^3 – об'єм азоту;
T_1 = 293 К – температура азоту до нагрівання;
T_2 = 313 К – температура азоту після нагрівання.
Виразимо з цього рівняння тиск:

$$p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}. \qquad (4.2)$$

Розмірність тиску

$$[p] = \frac{г\ моль}{г}\frac{ДжК}{мольКм^3} = \frac{Нм}{м^3} = \frac{Н}{м^2} = Па.$$

Підставивши в формулу (4.2) відповідні значення початкової і кінцевої температури та задані величини проведемо розрахунки:

$$p_1 = \frac{5}{28}\frac{8{,}31\cdot293}{4\cdot10^{-3}} = 1{,}08\cdot10^5\ Па;$$
$$p_2 = \frac{5}{28}\frac{8{,}31\cdot313}{4\cdot10^{-3}} = 1{,}16\cdot10^5\ Па.$$

Відповідь: p_1=1,08 Па; p_2=1,16 Па.

Приклад 4.3. Визначити густину водню при температурі 15°С та тиску 730 мм рт.ст.

Розв'язання. Густина газу – це параметр газу. Отже запишемо рівняння стану ідеального газу.

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

де $p = 730\cdot133{,}3$ Н/м^2 – тиск водню;
$m = 10^{-2}$ кг – маса водню;
$M = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль – молярна маса водню;
R = 8,31 Дж/мольК – універсальна газова стала;
T = 288 К – температура водню.
З рівняння слідує:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

$$[\rho] = \frac{Н \quad кг \quad моль \quad К}{м^2 моль \quad Дж \quad К} = \frac{кг}{м^3}.$$

Проведемо обчислення:

$$\rho = \frac{730 \cdot 133{,}32 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 288} = 81 \cdot 10^{-3} \left(\frac{кг}{м^3} \right)$$

Відповідь: $\rho = 81 \cdot 10^{-3}$кг/м^3

Приклад 4.4 Густина деякого газу за температури 10°С та тиску $2 \cdot 10^5$Па дорівнює 0,34 кг/м^3.Чому дорівнює маса одного молю цього газу?

Розв'язання. В задачі йде мова про визначення параметра m стану ідеального газу.

З рівняння стану для ідеального газу

$$pV = \frac{m}{M} RT ,$$

де p = 730·133,3 Н/м^2 – тиск водню;
m = 10^{-2} кг водню;
M=$2 \cdot 10^{-3}$кг/моль – молярна маса водню;
R = 8,31 Дж/мольК – універсальна газова стала;
T = 288 К – температура водню.
З рівняння стану для ідеального газу слідує:

$$M = \frac{mRT}{pV} = \rho \frac{RT}{p}.$$

$$[M] = \frac{кг}{м^3} \frac{Дж \quad К \quad м^2}{моль \quad К \quad Н} = \frac{кг}{моль}.$$

$$M = 0{,}34 \frac{8{,}31 \cdot 288}{2 \cdot 10^5} = 4 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль}.$$

Відповідь: M = $4 \cdot 10^{-3}$кг/моль – це газ гелій.

Приклад 4.5. В посудині знаходиться 14 г азоту та 9 г водню при температурі 10°С та тиску 10^6Па. Знайти: 1) масу одного моля суміші, 2)об'єм посудини.

Розв'язання. Розглядається суміш ідеальних газів для яких має місце закон Дальтона:

$$p = p_1 + p_2, \tag{4.3}$$

в якому загальний тиск суміші та парціальні тиски складових газів визначаються із рівняння стану ідеальних газів:

$$pV = \frac{m}{M} RT \;\Rightarrow\; p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}. \tag{4.4}$$

Підставивши відповідні значення тисків в формулу (4.4), отримаємо:

$$\frac{m}{M}\frac{RT}{V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}. \tag{4.5}$$

З рівняння (4.5) молярна маса суміші дорівнює:

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}}.$$

де $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярна маса азоту;
$M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярна маса водню.

$$[M] = [M_1] = \frac{кг}{моль}.$$

Підстановка чисельних значень величин дає результат:

$$M = \frac{(14 + 9) \cdot 10^{-3}}{\dfrac{14 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} + \dfrac{9 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} = 4,6 \left(\frac{кг}{моль}\right).$$

Об'єм посудини визначимо з рівняння (4.5) стану суміші:

$$V = \frac{(m_1 + m_2) \cdot RT}{pM}.$$

де R = 8,31 Дж/мольК – універсальна газова стала;
T = 288 К – температура суміші газів.
Розмірність об'єму:

$$[V] = \frac{кг \quad Дж \quad м^2 \quad моль}{моль \quad К \quad Н \quad кг} = м^3.$$

Підстановка чисельних значень величин дає результат:

$$V = \frac{(14+9)\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31\cdot 288}{10^6 4{,}6\cdot 10^{-3}} = 0{,}012 \quad (м^3).$$

Відповідь: M=4,6·10^{-3}кг/моль; V=0,012 $м^3$

Приклад 4.6. В посудині знаходиться суміш 10 г вуглецево кислого газу та 15 г азоту. Знайти густину цієї суміші за температури 27°С та тиску 1,5·10^6 Па.

Розв'язання. Розглядається суміш ідеальних газів для яких має місце закон Дальтона:

$$p = p_1 + p_2 \tag{4.6}$$

В рівнянні (4.6)загальний тиск суміші та парціальні тиски складових газів визначаються із рівняння стану ідеальних газів:

$$pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}. \tag{4.7}$$

З рівняння стану суміші визначається також густина суміші:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \tag{4.8}$$

Тобто для визначення густини суміші необхідно мати молярну масу M суміші. Підставивши відповідні значення тисків із рівняння (4.7) в рівняння (4.6), отримаємо:

$$\frac{m}{M}\frac{RT}{V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}. \tag{4.9}$$

З рівняння (4.9) виразимо молярну масу суміші:

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}}. \qquad (4.10)$$

де $M_1 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярна маса вуглецево кислого газу;
$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярна маса азоту.

Підставивши значення молярної маси суміші (4.10) в рівняння (4.8), отримаємо

$$\rho = \frac{p(m_1 + m_2)}{RT\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)}.$$

Перевіримо розмірність густини:

$$[\rho] = \frac{Н / м^2 \cdot кг}{Дж / кг \cdot моль \cdot К \cdot кг / моль} = \frac{кг}{м^3}.$$

Підстановка чисельних значень величин дає результат:

Відповідь: ρ=1,27 кг/м^3

Приклад 4.7 . Яка кількість молекул знаходиться в кімнаті об'ємом 80 м^3, якщо тиск 750 мм рт. ст., а температура 17°C.

Розв'язання. Кількість молекул це - параметр стану ідеального газу. Кількість молекул в даній масі газу дорівнює:

З рівняння стану для ідеального газу

$$pV = \frac{m}{M} RT ,$$

де $p = 750 \cdot 133{,}3$ Н/м^2 – тиск повітря;
$M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярна маса повітря;
R = 8,31 Дж/мольК – універсальна газова стала;
T = 290 K – температура повітря;
Виразимо $\frac{m}{M}$:

$$\frac{m}{M} = \frac{pV}{RT},$$

з врахуванням якої одержимо формулу для кількості молекул в кімнаті:

$$N = \frac{pV}{kT},$$

де $k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{моль}$ - стала Больцмана.

Перевіримо розмірність:

$$[N] = \frac{Н/м^2 \cdot м^3}{Дж/К \cdot К} = 1$$

Проведемо розрахунки:

$$N = \frac{750 \cdot 133{,}3 \cdot 80}{1{,}38 \cdot 10^{-23} 290} = 2 \cdot 10^{27}.$$

Відповідь: $N=2 \cdot 10^{27}$.

Приклад 4.8 . Знайти імпульс молекули водню при температурі 20°С. Швидкість молекули вважати рівною середній квадратичній швидкості.

Розв'язання.. Імпульс рухомої молекули визначається за формулою:

$$p = mV, \tag{4.11}$$

де m – маса молекули;

V – середня квадратична швидкість молекули.

Середня квадратична швидкість молекули визначається з формули:

$$V_{кв.} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \tag{4.12}$$

а маса молекули дорівнює

$$m = \frac{M}{N_A}. \tag{4.13}$$

Таким чином підставивши в (4.11) вирази (4.12) і (4.13) одержимо:

$$p = \frac{\sqrt{3MRT}}{N_A}.$$

де М = $2\cdot10^{-3}$ кг/моль – молярна маса водню;
R = 8,31 Дж/моль·К – універсальна газова стала;
Т = 293 К – температура водню;
$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ 1/моль – число Авогадро.

Перевіримо розмірність імпульсу молекули:

$$[p] = \frac{\sqrt{\frac{кг \;\; Дж \;\; К}{моль \;\; моль \;\; К}}}{1} моль = \frac{кг \;\; м}{с}.$$

Розрахуємо шукану величину:

$$p = \frac{\sqrt{3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 293}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 0{,}63 \cdot 10^{-23} \left(\frac{кгм}{с} \right).$$

Відповідь: $p=6{,}3\cdot10^{-24}$ кг·м/с.

Приклад 4.9. Середня квадратична швидкість молекул деякого газу дорівнює 450 м/с. Тиск газу $5\cdot10^4$ Н/м^2 Знайти густину газу за цих умов.

Розв'язання. Середня квадратична швидкість молекули дорівнює:

$$V_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \tag{4.14}$$

Густину газу, яка визначається за формулою

$$\rho = \frac{m}{V},$$

визначимо з рівняння стану ідеального газу:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \qquad (4.15)$$

Тоді з рівняння (4.14) виразивши $\frac{RT}{M} = \frac{V_{кв}^2}{3}$ і підставивши в (4.15) одержимо:

$$\rho = \frac{3p}{V_{кв}^2}.$$

Перевірка розмірності для густини дає одиницю вимірювання:

$$[\rho] = \frac{Н/м^2}{м^2/с^2} = \frac{кг\ м \cdot с^2}{с^2 \cdot м \cdot м^3} = \frac{кг}{м^3}.$$

Підстановка чисельних значень величин дає результат:

$$\rho = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^4}{450^2} 0{,}74\left(\frac{кг}{м^3}\right).$$

Відповідь: ρ=0,74·кг/м^3.

Приклад 4.10 Чому дорівнює енергія теплового руху молекул двохатомного газу, що знаходиться в посудині об’ємом 2 л під тиском р=1,5·10^4 Н/м^2?

Розв’язання..Внутрішня енергія ідеального газу визначається за теоремою про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT\ . \qquad (4.16)$$

З рівняння Клайперона-Мендєлєєва

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

і з формули (4.16) одержимо вираз для визначення внутрішньої енергії ідеального газу:

$$U = \frac{i}{2} pV. \qquad (4.17)$$

Перевіримо розмірність:

$$[U] = \frac{Н}{м^2} м^3 = Дж .$$

Молекули двохатомного газу мають i=5 ступенів вільності. Підстановка чисельних значень величин в (4.17) дає результат:

$$U = \frac{5}{2} 1{,}5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 7{,}5 \cdot 10^2 (Дж) = 0{,}75\ кДж .$$

Відповідь: U = 0,75·кДж.

Приклад 4.11. Двохатомний газ масою 1 кг знаходиться під тиском $p=8\cdot10^4$ Н/м^2 і має густину ρ = 4 кг/м^3. Чому дорівнює енергія теплового руху молекул газу за цих умов?

Розв’язання. Енергія теплового руху молекул газу це - внутрішня енергія ідеального газу, яка визначається за теоремою про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT .$$

Виразимо густину ідеального газу з рівняння його стану :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Звідси виразимо:

$$\frac{RT}{M} = \frac{p}{\rho}. \qquad (4.18)$$

Тоді, враховуючи вираз (4.18), одержимо:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m\ p}{\rho}.$$

Перевіримо розмірність:

$$[U]=\frac{кг\ Н\ /\ м^2}{кг\ /\ м^3}=Н\cdot м=Дж\ .$$

Молекули двохатомного газу мають *i*=5 ступенів вільності.

Підстановка чисельних значень величин дає результат:

$$U=\frac{5}{2}\frac{1\cdot 8\cdot 10^4}{4}=5\cdot 10^4\,(Дж)=50\ кДж\ .=$$

Відповідь: U=50·кДж.

Задачі для закріплення теоретичного матеріалу і навичок розв'язання задач з теми «Молекулярна фізика, стан та закони ідеальних газів»

4.01 Визначити концентрацію молекул кисню в посудині об'ємом V = 10 л при атмосферному тиску.

4.02 Визначити відносну молекулярну масу M_r газу, якщо при температурі $T=154K$ і тиску p=2,8 МПа він має густину $\rho=6{,}1\,кг/м^3$.

4.03 Визначити густину ρ водяної пари, що перебуває під тиском p=2,5 кПа при температурі T=250 К.

4.04 Кількість ν кисню дорівнює 0,5. Визначити внутрішню енергію U водню, а також середню кінетичну енергію $\langle\varepsilon\rangle$ молекули цього газу при температурі T=300 К.

4.05 Водень перебуває при температурі T=300 К. Знайти середню кінетичну енергію $\langle\varepsilon_{об}\rangle$ обертального руху однієї молекули, а також сумарну кінетичну енергію E_K всіх молекул цього газу; кількість речовини водню ν=0,5 моль.

4.06 Яким може бути найменший об'єм балона, що вміщає 6,4 кг кисню, якщо його стінки при температурі 20°С витримують тиск $1{,}6\cdot10^5$ Па? ($M=32\cdot10^{-3}$ кг/моль.)

4.07 Знайти масу повітря, що заповнює аудиторію заввишки 5 м і площею підлоги 200 м2. Тиск повітря 750 мм. рт. ст., температура приміщення 17°С. (Масу одного моля повітря прийняти рівною $29\cdot10^{-3}$ кг/моль. (1 мм. рт. ст. = 133,3 Па).

4 08 Суміш водню і азоту загальною масою m=290 г при температурі T=600 К і тиску p=2,46 МПа займає об'єм V=30 л. Визначити масу m_1 водню і масу m_2 азоту.

4.09 У балоні об'ємом V=22,4 л перебуває водень при нормальних умовах. Після того, як у балон було додатково введена деяка кількість гелію, тиск у балоні зріс до p=0,25 МПа, а температура не змінилася. Визначити масу m гелію, введеного в балон.

4.10 Суміш кисню і азоту перебуває в посудині під тиском p=1,2 МПа. Визначити парціальні тиски p_1 і p_2 газів, якщо масова частка ω кисню в суміші 20%.

4.11 У посудині об'ємом V=10 л при температурі T=450 K перебуває суміш азоту масою m1=5 г і водню масою m_2=2 г. Визначити тиск p суміші.

4.12 Визначити сумарну кінетичну енергію ЕК поступального руху всіх молекул газу, що знаходяться в посудині об'ємом V=3 л під тиском p=540 кПа.

4.13 Молярна внутрішня енергія U_μ деякого двоатомного газу дорівнює 6,02 кДж. Визначити середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon_{об} \rangle$ обертального руху однієї молекули цього газу. Газ вважати ідеальним.

4.14 Визначити середню квадратичну швидкість $\upsilon_{кв}$ молекули газу, що знаходиться в посудині об'ємом V=2 л під тиском p=200 кПа. Маса газу m=0,3 г.

4.15 Водень перебуває при температурі T=300 K. Знайти середню кінетичну енергію обертального руху $\langle \varepsilon_{об} \rangle$ однієї молекули, а також сумарну кінетичну енергію E_K всіх молекул цього газу; кількість речовини водню v=0,5 моль.

4.16 10 кг кисню знаходяться під тиском p= 304 кПа при температурі t_1= 10°С. Після розширення унаслідок нагрівання при постійному тиску кисень зайняв об'єм V_2 = 10 л. Знайти об'єм V_1 газу до розширення, температуру T_2 газу після розширення, густини газу ρ_1 і ρ_2 газу до і після розширення.

4.17 12 г азоту займають об'єм $4\cdot10^3$ $м^3$ при температурі 7°С. Після нагрівання газу при постійному тиску його густина стала рівною 0,6 кг/$м^3$. до якої температури нагрівали газ?

4.18 У посудині об'ємом V = 2 л знаходиться маса m_1 = 1,6 г вуглекислого газу (CO_2) ($M=44\cdot10^{-3}$ кг/моль) і маса m_2 закису азоту (N_2O) ($M=44\cdot10^{-3}$ кг/моль) при температурі t = 127°С. Знайти тиск p суміші в посудині. За температури t = 500°С, знаючи, що при цій температурі вся вода перетворюється на пару.

4.19 Яке число молекул n містить одиниця маси водяної пари? ($M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль, $N_A = 6{,}023\cdot10^{23}$ 1/моль).

4.20 Яке число молекул N знаходиться в кімнаті об'ємом V = 80 $м^3$ при температурі t = 17°С і тиску p = 100 кПа? Яке число молекул N знаходиться в кімнаті об'ємом V = 80 $м^3$ при температурі t = 17°С і тиску p = 100 кПа?

4.21 Густина деякого газу ρ = 0,06 кг/$м^3$, середня квадратична швидкість його молекул Vкв = 500 м/с. Знайти тиск p, який газ створює на стінки посудини.

4.22 Знайти кінетичну енергію $E_к$ теплового руху молекул, що знаходяться в 1 кг повітря при температурі 15°С. Повітря вважати однорідним двохатомним газом, маса одного моля якого дорівнює $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Контрольні запитання

1 Сформулювати основні положення молекулярно-кінетичної теорії.

2 Записати рівняння стану ідеального газу.

3 Чому дорівнює тиск суміші газів?

4 Сформулювати закон Дальтона і пояснити його.

5 Що називається парціальним тиском газу?

6 Що називається густиною речовини?

7 Як визначається густина суміші двох речовин?

8 Записати основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів і пояснити його.

9 Що таке концентрація молекул?

10 В яких одиницях вимірюється концентрація молекул?

11 Що таке енергія теплового руху молекул ідеального газу?

12 Чому дорівнює енергія теплового руху молекул ідеального газу?

13 Що називається числом ступенів вільності молекул газу?

14 Які значення може приймати число ступенів вільності молекул ідеального газу?

15 В чому полягає закон розподілу енергії по ступеням вільності?

16 Яка частина енергії молекул приходиться на долю поступального руху, якщо ця молекула двохатомна?

17 Яка частина енергії молекул приходиться на долю обертального руху, якщо ця молекула двохатомна? Багатоатомна?

18 Яка частина енергії молекул приходиться на долю поступального руху, якщо ця молекула багатоатомна?

19 Яка частина енергії молекул приходиться на долю обертального руху, якщо ця молекула багатоатомна?

20 Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії ідеального газу?

21 Як визначити зміну внутрішньої енергії суміші газів?

2.2 Елементи статистичної фізики і фізичної кінетики.

Основні поняття і формули.

Статистична механіка вивчає поведінку термодинамічних систем на підставі вивчення статистичних закономірностей руху її структурних елементів – атомів та молекул, наприклад, в подальшому - молекул. Теорія встановлює зв'язки між термодинамічними параметрами станів термодинамічної системи із статистичними характеристиками її структурних елементів, що знаходяться за допомогою статистичних розподілів молекул за відповідними характеристиками руху молекул. Тому основним законом стану термодинамічної системи в статистичній механіці є відповідні функції розподілу молекул за величинами x: f(x). Середні значення досліджуваної величини та довільної функції від неї знаходяться за такими формулами:

$$\langle x \rangle = \int\limits_{(область\ існування)} x f(x) dx; \quad \langle F(x) \rangle = \int\limits_{(область\ існування)} F(x) f(x) dx.$$

Функція розподілу молекул за швидкостями (за їх модулями)

$$f(V) = \frac{dN_V}{NdV} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} 4\pi V^2.$$

Співвідношення представляє собою максвелівський розподіл молекул за швидкостями. Графік функції максвелівського розподілу представлений на рис. 5.1.

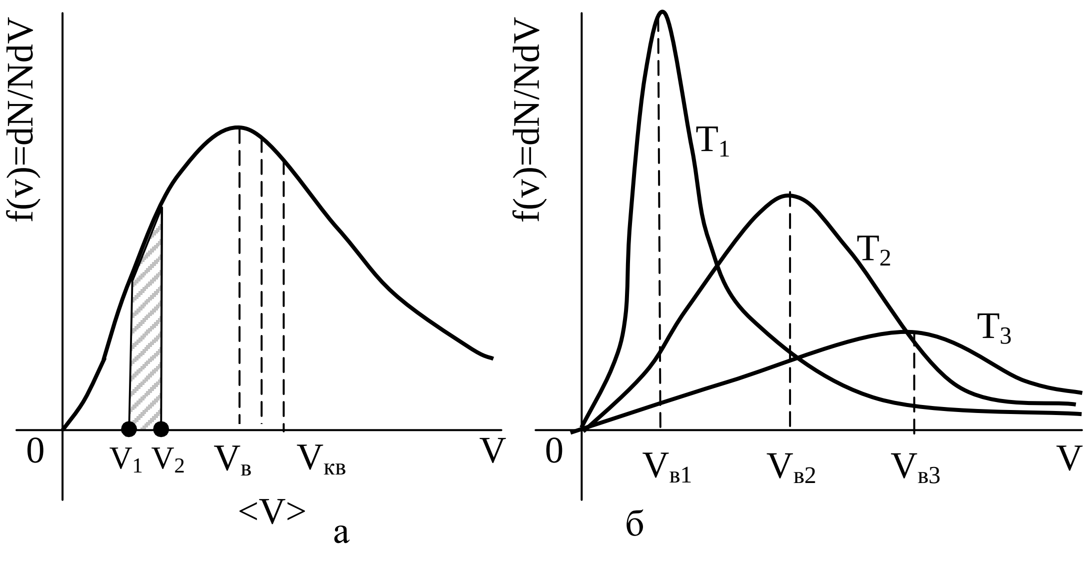


Рисунок 5.1

На рис. 5.1а представлений загальний вигляд графіка функції Максвела, а на рис. 5.1б демонструється залежність ходу функції від температури газу: $T_1<T_2<T_3$. Як це слідує з умови нормування, площа під кожним з графіків однакова, тобто $\int\limits_0^\infty f(V)dV = 1,$ а ймовірність для молекул мати швидкості в межах від V_1 до V_2 (див. рис. 5.1а) визначається як

$$\Delta N = \int_{V_1}^{V_2} f(V)dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} 4\pi V^2 dV .$$

Найбільш ймовірною (найбільш вірогідною) швидкістю є швидкість $V_в$, що відповідає максимуму функції (2.2) (див. рис. 2.1). Дослідження на максимум функції (2.2) дає результат:

$$V_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Середня арифметична швидкість та квадрат середньої квадратичної швидкостей знаходяться за формулами (2.1):

$$\langle V \rangle = \int_0^\infty V \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} 4\pi V^2 dV = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}};$$

$$V_{кв}^2 = \langle V^2 \rangle = \int_0^\infty V^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} 4\pi V^2 dV = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{M}.$$

Середня квадратична швидкість, як це випливає з другого співвідношення (2.3):

$$V_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Всі ці три статистичні характеристики представлені на рис. 5.1 і відносяться між собою як

$$V_в : \langle V \rangle : V_{кв} = \sqrt{2} : \sqrt{\frac{8}{\pi}} : \sqrt{3} .$$

Розподіл тиску атмосфери, а також концентрації молекул за висотою в атмосфері за умов постійності температури задається законом:

$$\ln \frac{p_h}{p_0} = -\frac{mgh}{kT} \text{ або } p_h = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

де p_h та p_0 - відповідно тиск повітря на висоті h та біля поверхні Землі.

Формула встановлює залежність тиску повітря від висоти підняття над нульовим рівнем і носить назву барометричної формули.

Скориставшись рівнянням стану ідеальних газів у формі $p = nkT$, барометричну формулу можна переписати для залежності концентрації молекул від висоти підняття над нульовим рівнем:

$$\ln\frac{n_h}{n_0} = -\frac{mgh}{kT},$$

або

$$n_h = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Розподілу молекул рівноважного класичного ідеального газу за енергіями в потенціальних полях репрезентує розподіл Больцмана:

$$f(E) = Ae^{-\frac{E}{kT}}$$

де А – постійна величина, що знаходиться з умови нормування:

$$\int\limits_{(\text{область існування})} f(E)dE = 1.$$

Методичні вказівки та приклади розв’язання задач до теми «Елементи статистичної фізики і фізичної кінетики».

В кінетичній теорії, яка розглядає газ як сукупність великої кількості хаотично рухомих молекул і тому є статистичною теорією, використовуються різні типи середніх швидкостей молекул: середня квадратична$V_{кв}$, середня арифметична <V>, найбільш імовірна $V_{ім}$.

Середньою квадратичною швидкістю користуються тоді, коли необхідно розрахувати будь-яку фізичну величину, що пропорціональна квадрату швидкості, наприклад кінетичну е н е р г ію поступального руху молекул газу, тиск газу.

Середня арифметична швидкість дозволяє визначити середні значення таких фізичних величин, які характеризують властивості газу і в формулу яких швидкість входить в першому ступені, наприклад, середнє число зіткнень молекули в одиницю часу, середній час вільного пробігу, середній імпульс молекул. Найбільш імовірну швидкість використовують в задачах, які пов’язані з застосуванням закону розподілу молекул за швидкостями. Цій швидкості відповідає максимум функції Максвелла.
Основне рівняння кінетичної теорії газів , а також закон Максвелла про розподіл молекул за швидкостями справедливі лише для ідеального газу.

Приклад 5.1 Визначити середню арифметичну, середню квадратичну та найбільш ймовірну швидкості молекул газу, густина якого при тиску p=4·10^4 Па дорівнює 0,3 кг/м^3.

Розв'язання. Розв'язок задачі виконуємо за наведеними у вступній часитині формулами:

середня арифметична $\langle V\rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$;

середня квадратична $V_{кв} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$;

найбільш ймовірна $V_i = \sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$.

Густина газу визначається з рівняння стану ідеального газу

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT},$$

що дає можливість визначити вираз

$$\frac{RT}{M} = \frac{p}{\rho}.$$

Таким чином

$$\langle V\rangle = \sqrt{\frac{8p}{\pi\rho}};\ V_{кв} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}};\ V_i = \sqrt{\frac{2p}{\rho}};\quad [V] = \sqrt{\frac{Н\ м^3}{м^2\ кг}} = \frac{м}{с}$$

Підставивши чисельні значення відомих величин, отримаємо:

$$\langle V\rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\cdot 365 = 516(м/с);V_{кв} = \sqrt{3}\cdot 365 = 632(м/с);V_в = \sqrt{2}\cdot 365 = 516(м/с).$$

Відповідь: $\langle V\rangle = 516(м/с);V_{кв} = 632(м/с);V_в = 516(м/с).$

Приклад 5.2 . Визначити яка кількість молекул азоту при температурі 150°С має швидкості від 300 м/с до 325 м/с?

Розв'язання. Розв'язок задачі виконуємо за наведеною у вступній часитині табл. 1. З цією метою необхідно визначити найбільш імовірну швидкість молекул азоту за вказаної температури:

$$V_i = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

де R = 8,31 Дж/мольК – універсальна газова стала;
М = 28·г/моль – молярна маса азоту;
Т = 423 К – температура азоту.
Таким чином

$$V_i = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 423}{28 \cdot 10^{-3}}} = 500\left(\frac{м}{с}\right),$$

відповідно відносні швидкості

$$U_1 = \frac{V_1}{V_i} = \frac{300}{500} = 0{,}6; \quad U_2 = \frac{325}{500} = 0{,}65.$$

Для відносної швидкості U_1=0,6 маємо

$$\frac{\Delta N}{N \Delta U} = 0{,}57,$$

$$\frac{\Delta N}{N} = 0{,}57 \Delta U = 0{,}57(0{,}65 - 0{,}6) = 0{,}0285,$$

Відповідь: ΔN/N=0,0285=2,85%

Приклад 5.3. В балоні знаходиться 2,5 г кисню. Визначити кількість молекул кисню, швидкість яких перевищує середню квадратичну швидкість.

Розв'язання. Розв'язок задачі виконуємо за наведеною у вступній часитині табл. 1 останні стовпчики. З цією метою необхідно визначити значення середньої квадратичної швидкості по відношенню до найбільш ймовірної:

$$U = \frac{V_{\hat{e}\hat{a}}}{V_{\hat{a}}} = \sqrt{\frac{3RTM}{2MRT}} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}225.$$

Відповідно до табл.. 1 маємо: U=1,0 відповідає $\frac{N_{\div}}{N}$=0,572; U=1,25 відповідає $\frac{N_{\div}}{N}$=0,374. Вважаючи залежність пропорційною, знайдемо для U=1,225 відповідає $\frac{N_{\div}}{N}$=0,394 – це доля молекул, що мають вказаний діапазон швидкостей. Для визначення їх абсолютного числа визначимо загальну кількість молекул кисню вказаної маси:

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{2{,}5}{32} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 4{,}7 \cdot 10^{22},$$

де N_A = 6,021/моль – постійна Авагадро;

M = 32·г/моль – молярна маса кисню.

Таким чином

$$N_x = 0{,}394N = 0{,}394 \cdot 4{,}7\ 10^{22} = 1{,}85\ 10^{22} \text{ штук молекул.}$$

Відповідь: N=0,0285=2,85%

Приклад 5.4. Яка густина повітря: 1) біля поверхні Землі; 2) на висоті h = 4 км над поверхнею Землі? Вважати температуру повітря сталою і рівною 0°C. Тиск повітря біля поверхні Землі дорівнює 10^5 Па.

Розв'язання. Густину повітря біля поверхні Землі, як параметр стану ідеального газу, можна визначити з рівняння стану:

$$\rho_1 = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT},$$

де R = 8,31 Дж/мольК – універсальна газова стала;

M = 29 10^{-3}·кг/моль – молярна маса повітря;

T = 273 К – температура повітря.

Після підстановки чисельних значень величин, отримаємо:

$$\rho_1 = \frac{10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 273} = 1{,}28 \left(\frac{кг}{м^3}\right).$$

Густину повітря на висоті h визначимо за допомогою барометричної формули

$$n_h = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

Густину газу виразимо через концентрацію молекул:

$$\rho = m_0 n$$

Отже тиск дорівнює:

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

Проведемо розрахунки:

$$\rho_h = 1{,}28\, e^{-\frac{29\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}84\cdot 10^{3}}{8{,}31\cdot 273}} = 0{,}775\left(\frac{кг}{м^{3}}\right).$$

Відповідь: ρ_0 = 1,28 кг/м^3; ρ_h = 0,775 кг/м^3

Задачі на закріплення теоретичного матеріалу з теми «Елементи статистичної фізики і фізичної кінетики»

5.01 За якої температури середня арифметична швидкість молекул азоту більше їх найбільш ймовірної на 50 м/с?

5.02Середня арифметична швидкість молекул газу при тиску 6 кПа. Визначити густину газу, середню квадратичну і середню арифметичну швидкості молекул за цих умов.

5.03Яким має бути тиск газу, густина якого 1,5 кг/м^3, а середня квадратична швидкість молекул складає 632,5 м/с.

Середня квадратична швидкість молекул газу 500м/с, тиск 0,2 МПа. Визначити густину газу, середню арифметичну і найбільш імовірну швидкості молекул цього газу.

5.02 Яка частина молекул кисню за 0°С мають швидкості від 100 м/с до 110 м/с? .

5.03 Яка частина загального числа молекул має швидкості: а)більші за найбільш ймовірну; б) менші найбільш ймовірної?

5.04 Азот знаходиться при температурі 300 К і тиску 10^5 Па Скільки ударів в секунду зазнають в середньому молекули азоту за цих умов?

5.05 Молекули гелію зазнають за одну секунду $1{,}27\cdot 10^{10}$ зіткнень. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул цього газу при тиску $3\cdot 10^5$ Па.

5.06 На якій висоті над рівнем моря густина кисню при температурі -10 ^{0} С складає 50 % від його густини на рівні моря.

5.07 Який газ на висоті 4 км над рівнем моря при температурі 7^0 С складає 73,8% його густини на рівні моря?

5.08 На якій висоті тиск повітря складає 75% від тиску на рівні моря? Температуру вважати постійною і рівною 0°.

5.09 Пасажирський літак виконує політ на висоті h_1 = 8300 м. Щоб не забезпечувати пасажирів кисневими масками, в кабіні за допомогою компресора підтримується тиск, відповідний висоті h_2 = 2700 м. Знайти різницю тиску всередині і зовні кабіни. Температуру зовнішнього повітря вважати рівною $t_1 = t_2$ = 0°С; Тиск біля поверхні Землі $p_0 = 1{,}013\cdot 10^5$ Па. .

Контрольні запитання.

1 Записати закон Максвела для розподілу молекул ідеального газу за швидкостями,

2 Що таке відносна кількість молекул?

3 Який фізичний зміст має графік розподілу молекул ідеального газу за швидкостями?

4 В бік яких швидкостей зміщується максимум кривої розподілу молекул ідеального газу за швидкостями при збільшенні температури газу?

5 Яка швидкість називається найімовірнішою?

6 Яку швидкість називають середньою арифметичною швидкістю молекул?

7 Яку швидкість називають середньою квадратичною швидкістю молекул?

8 Який зв'язок існує між середньою квадратичною, середньою арифметичною і найімовірнішньою швидкістю теплового руху молекул?

9 Що називають довжиною вільного пробігу молекули?

10 Що таке ефективний діаметр молекули газу?

11 Який зв'язок існує між довжиною вільного пробігу молекули і числом зіткнень молекул в одиницю часу?

12 Який вигляд має барометрична формула?

13 Пояснити фізичний зміст барометричної формули.

15 Як змінюється тиск газу при зміні висоти для різних газів?

16 Як змінюється тиск газу при різних температурах?

17 Який вигляд має закон Больцмана для розподілу частинок в зовнішньому потенціальному полі?

18 Як змінюється концентрація молекул із збільшенням висоти?

19 Як залежить густина ідеального газу від висоти над рівнем моря?

2.3 Перший закон термодинаміки.

Основні поняття і формули.

Внутрішня енергія ідеальних газів складається тільки з кінетичної енергії руху молекул і дорівнює

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT .$$

Перший закон термодинаміки стверджує, що кількість підведеної до термодинамічної системи теплоти витрачається на зміну її внутрішньої енергії та на роботу системи проти зовнішніх сил:

$$\Delta Q = \Delta U + A.$$

Досвід вчить, що кількість теплоти, підведеної до системи, прямо пропорційна різниці температур системи:

$$Q = C\,(T_2 - T_1)$$

де T_1 - початкова,

T_2 - кінцева температури системи;

C - постійний для системи коефіцієнт, що носить назву теплоємності системи.

Якщо термодинамічною системою є однорідне тіло, то її теплоємність пропорційна масі тіла:

$$C = c\,m,$$

де c - питома теплоємність речовини тіла;

m - маса тіла,

а також пропорційна кількості речовини тіла:

$$C = C_м \nu,$$

де $C_м$ - молярна теплоємність речовини тіла,

ν - кількість молів речовини тіла,

$$\nu = {}^{m}\!/_{M}\ ,$$

де m - маса тіла;

M - молярна маса речовини.

Таким чином, розглядаються такі теплоємності тіл:

теплоємність

$$C = \frac{Q}{T_2 - T_1};\ C = \frac{\partial Q}{\partial T},$$

молярна теплоємність

$$C_M = \frac{Q}{\nu\,(T_2 - T_1)};\ C_M = \frac{\partial Q}{\nu \partial T},$$

питома теплоємність

$$c = \frac{Q}{m\left(T_2 - T_1\right)};\ c = \frac{\partial Q}{m\,\partial T}.$$

В ізохоричному процесі (V = const) робота газу дорівнює:

$$\delta A = p dV = 0,$$

отже кількість затраченої теплоти

$$Q = \Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T .$$

В ізотермічному процесі (T = const) внутрішня енергія не змінюється,

$$\Delta U = 0,$$

а кількість теплоти визначається за формулою

$$Q = A = \int_1^2 P\,dV .$$

В підінтегральному виразі є дві змінні. Скориставшись рівнянням стану ідеального газу, виразимо, наприклад, p через об'єм V і одержимо:

$$Q = A = \frac{m}{M}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Відомо, що ізотермічний процес підкоряється закону Бойля-Маріотта:

$$P_1V_1 = P_2V_2,$$

тому для ізотермічного процесу

$$Q = A = \frac{m}{M}RT\ \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ \ln\frac{p_1}{p_2} = P_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

В ізобаричному процесі P = const, тому робота газу дорівнює:

$$A = P\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right)$$

Перший закон термодинаміки з урахуванням указаних рівнянь має вигляд:

$$Q = A + \Delta U = \frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right) + \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right);.$$

$$Q = \frac{i+2}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i+2}{2}\frac{m}{M}R\Delta T .$$

Всі ізопроцеси досліджені для незмінної маси ідеальних газів: (m = const , M = const).

Теплоємності ідеальних газів визначаються за формулами:

для ізохоричного процесу –

$$C_M^{(V)} = \left(\frac{\partial Q}{\nu \partial T} \right)_V = \frac{i}{2} R; c_V = \frac{1}{M} \frac{i}{2} R;$$

для ізотермічного процесу теплоємність не визначена і формально прагне до нескінченності

$$C_M^{(T)} \to \infty; c_T \to \infty;$$

для ізобаричного процесу

$$C_M^{(p)} = \left(\frac{\partial Q}{\nu \partial T} \right)_p = \frac{i+1}{2} R; \; c_p = \frac{1}{M} \frac{i+1}{2} R;$$

Адіабатичним називається процес, що відбувається без теплообміну з довколишніми тілами. В адіабатичному процесі

$$\delta Q = 0,$$

тобто робота проти зовнішніх сил виконується за рахунок зміни внутрішньої енергії

$$A = -\Delta U = -(U_2 - U_1).$$

Для ідеального газу

$$A = -\frac{i}{2} \frac{m}{M} R \left(T_2 - T_1 \right).$$

Адіабатичний процес описується рівнянням Пуасона:

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma},$$

де $\gamma = \frac{C_M^{(P)}}{C_M^{(V)}} = \frac{c_P}{c_V} = \frac{i+2}{i}$ - показник адіабати.

Рівняння Пуассона може бути представлено в інших формах шляхом використання співвідношення для об'єднаного газового закону:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}; \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1};$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \ \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma};$$

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}.$$

Теплоємність тіла в адіабатичних процесах дорівнює нулю.

Методичні вказівки і приклади розв'язання задач з теми «Перший закон термодинаміки»

Розв'язання задач на застосування першого закону термодинаміки потребують знань викладених вище і вміння розпоряджатись указаними формулами Перш ніж приступати до розв'язання задачі даного розділу необхідно вияснити про який процес йде мова та вибрати відповідні формули для запису першого закону термодинаміки.

Для здійснення ізотермічного процесу (T–const) розширення або стиснення газу необхідний достатній теплообмін між газом і оточуючім середовищем. Цьому сприяє велика теплопровідність стінок посудини, в котрому знаходиться газ, і повільне протікання процесу. Навпаки умовою адіабатичного процесу розширення або стиснення газу є відсутність теплообміну між газом і середовищем, що його оточує. Ця умова на практиці виконується тим точніше, чім меншою є теплопровідність стінок посудини, в якій знаходиться газ, і чім швидше протікає процес.

В ізохоричному і ізобаричному процесах кількість теплоти, що одержав газ, завжди пов'язана із зміною його температури. При цьому кількість теплоти визначаєтьсч через відповідні молярні тепоємності – C_V і C_p. При нагрівання газ одержує теплоту, при охолодженні – віддає.

Разом з тим при ізотермічному і адіабатичному процесах не існує зв'язку між приростом температури газу і кількістю теплоти, що ним одержана, причиною чого є те, що при ізотермічному процесі відсутня зміна температури, хоч газ при цьому одержує або віддає тепло, а в адіабатичному – не одержує і не віддає теплоту, хоч при цьому змінюється його температура.

Приклад 6.1. Знайти питому теплоємність кисню: 1) за сталого об'єму; 2) за сталого тиску.

Розв'язання. В задачі йде мова про питомі теплоємності ідеального газу. Вони визначаються відповідно за формулами

$$c_V = \frac{1}{M}\frac{i}{2}R;\ c_p = \frac{1}{M}\frac{i+2}{2}R, \tag{6.1}$$

де M = $32\cdot10^{-3}$ кг/моль – молярна маса кисню;
R = 8,31 Дж/мольК – універсальна газова стала;
i=5 – число ступіней вільності молекули кисню.
З рівняння (6.1) слідує, що розмірність питомих теплоємностей:

$$[c] = \frac{моль}{кг}\frac{Дж}{мольК} = \frac{Дж}{кг\ К}.$$

Підставивши відповідні чисельні значення заданих величин, вирахуємо:

$$c_V = \frac{1}{32\cdot10^{-3}}\frac{5}{2}8{,}31 = 649\left(\frac{Дж}{кгК}\right);$$
$$c_p = \frac{1}{32\cdot10^{-3}}\frac{7}{2}8{,}31 = 909\left(\frac{Дж}{кгК}\right).$$

Відповідь: c_V=649Дж/кгК, c_p=909Дж/кгК.

Приклад 6.2. 2 л азоту знаходиться під тиском p = 10^5 Па. Яку кількість тепла необхідно підвести до азоту, щоб: 1) при постійному тиску об'єм газу збільшився удвічі; 2) при постійному об'ємі тиск збільшився удвоє?

Розв'язання. Перший закон термодинаміки в застосуванні до ізобаричного процесу в ідеальному газі дає такий результат:

$$Q_1 = A + \Delta U = \frac{i+2}{2}\frac{m}{M}R(T_2 - T_1).$$

Рівняння стану, запишемо двічі для ізобаричного процесу:

$$pV = \frac{m}{M}RT_1,\ pV_2 = \frac{m}{M}RT_2,$$

що дає можливість виразити зміну температури газу через зміну його об’єму:

$$\frac{m}{M} R\left(T_2 - \grave{O}_1\right) = p\left(V_2 - V\right) = p\left(2V - V\right) = pV \ .$$

Таким чином, підведена кількість теплоти:

$$Q_1 = \frac{i+2}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i+2}{2}pV \ ,$$

де $i = 5$ - число ступіней вільності молекули азоту;
$V = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3 – об’єм азоту;
$p = 10^5$ Н/м^2 – тиск азоту.
Перевіримо розмірність:

$$\left[Q_1\right] = \frac{Н}{м^2} м^3 = Дж \ .$$

Підстановка чисельних значень величин дає результат:

$$Q_1 = \frac{5+2}{2} 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 700 \left(Дж\right),$$

Відповідно перший закон термодинаміки в застосуванні до ізохоричного процесу в ідеальному газі дає такий результат:

$$Q_2 = \Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right).$$

Рівняння стану, записане двічі для ізохоричного процесу:

$$pV = \frac{m}{M}RT_1, \ p_2V = \frac{m}{M}RT_2$$

дає можливість виразити зміну температури через зміну тиску газу:

$$\frac{m}{M} R\left(T_2 - \grave{O}_1\right) = V\left(p_2 - p\right) = V\left(2p - p\right) = pV \ .$$

Таким чином

$$Q_2 = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i}{2}pV \quad .$$

$$\left[Q_2\right] = \frac{Н}{м^2}м^3 = Дж.$$

Підстановка чисельних значень величин дає результат:

$$Q_1 = \frac{5}{2}10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 500\left(Дж\right).$$

Відповідь: Q_1=700 Дж; Q_2=500 Дж.

Приклад 6.3. На нагрівання 40 г кисню від 16°С до 40°С під тиском 10^5 Па затрачено 623 Дж.. За яких умов нагрівався газ (p=const, чи V=const)?

Розв'язання. Перший закон термодинаміки в застосуванні до ізобаричного процесу в ідеальному газі дає такий результат:

$$Q_1 = A + \Delta U = \frac{i+2}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right). \qquad (6.1)$$

де *i*=5 – число ступіней вільності молекули кисню;
M = 32 г/моль – молярна маса кисню;
R = 8,31 Дж/мольК – універсальна газова стала;
T_1=289 К –початкова температури кисню
T_2=313 К – кінцева температури кисню.
З рівняння (1) слідує, що розмірність кількості теплоти:

$$\left[Q_1\right] = \frac{г\ моль}{г}\frac{Дж}{мольК}К = Дж.$$

Підстановка чисельних значень величин дає результат:

$$Q_1 = \frac{5+2}{2}\frac{40}{32}8{,}31\left(313 - 289\right) = 873\left(Дж\right).$$

Порівнюючи формули кількості теплоти для ізобаричного процесу (6.1)та формулу кількості теплоти для ізохоричного процесу

$$Q = \Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T, \qquad (6.2)$$

бачимо, що кількість необхідного тепла в ізохорному процесі менше в $\frac{i+2}{i}=\frac{5+2}{5}=1{,}4$ рази менше.

Тобто

$$Q_2=\frac{873}{1{,}4}=623\,(Дж).$$

Відповідь: Газ нагрівався за умови сталого об'єму.

Адіабатичний процес розглядається окремо. Розв'язок задач потребує знання різних форм рівняння Пуассона а також рівняння, що дає роботу ідеального газу в адіабатичному процесі.

Приклад 6.4. Двохатомний газ, що знаходиться за температури T_1 = 300 К та тиску p = $2\cdot10^6$ Па стискується адіабатично від об'єму V до об'єму 0,5V . Визначити температуру і тиск в кінці стискування.

Розв'язання. Розглядається адіабатичний процес в ідеальному газі. Скористаємось рівняння Пуассона у вигляді:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}=\frac{T_1}{T_2},\tag{6.3}$$

де $\gamma=\frac{i+2}{i}=\frac{5+2}{5}=1{,}4$ відношення молярних теплоємностей за сталого тиску та сталого об'єму в двохатомному газі (i=5 – число ступіней вільності).

З рівняння (6.3) виразимо температуру після стиснення:

$$T_2=T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}.$$

Підстановка чисельних значень величин в одержану формулу дає результат:

$$T_2=300\left(\frac{V_1}{0{,}5V_1}\right)^{1,4-1}=396\,(K).$$

Для визначення тиску газу використаємо рівняння Пуассона у вигляді:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}. \tag{6.4}$$

Звідки виразимо тиск після стиснення:

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}.$$

Підстановка чисельних значень величин дає результат:

$$p_2 = 2\cdot 10^5\left(\frac{V_1}{0{,}5V_1}\right)^{1,4} = 5{,}3\cdot 10^5\,(Па).$$

Відповідь: $T_2 = 396$ К; $p_2 = 5{,}3\cdot 10^5$ Па.

Задачі на закріплення теоретичного матеріалу та розв'язання задач з теми «Перший закон термодинаміки»

6.01 Знайти відношення питомих теплоємностей c_p/c_V для кисню.

6.02 Густина деякого двоатомного газу за нормальних умов $\rho = 1{,}43$ кг/м^3. Знайти питомі теплоємності c_v і c_p цього газу.

6.03 Маса m = 10 г кисню знаходиться при тиску p = 0,3 МПа і температурі t = 10°C. Після нагрівання при постійному тиску газ зайняв об'єм V_2 = 10 л. Знайти кількість теплоти Q, одержану газом, і енергію теплового руху молекул U до і після нагрівання.

6.04 12 г азоту знаходиться в закритій посудині об'ємом 2 л при температурі t = 10°C. Після нагрівання тиск в посудині став рівний $13{,}3\ 10^5$ Па. Яка кількість теплоти була надана газу при нагріванні?

6.05 Яку кількість теплоти треба надати 12 г кисню, щоб нагріти його на 50°C при постійному тиску?

6.06 У закритій судині об'ємом V = 10 л знаходиться повітря при тиску p = 0,1 МПа. Яку кількість теплоти Q треба надати повітрю, щоб підвищити тиск в посудині у 5 разів?

6.07 Маса m = 10 г кисню знаходиться під тиском p = 300 кПа і температурі t = 10°C. Після нагрівання при постійному тиску газ зайняв об'єм V = 10 л. Знайти кількість теплоти Q, яку одержав газ, зміну ΔU внутрішньої енергії газу і роботу A, виконану газом при розширенні.

6.08 У закритій посудині знаходиться маса m_1 = 20 г азоту і маса m_2 = 32 г кисню. Знайти зміну ΔU внутрішньої енергії суміші газів при охолодженні її на ΔT =28К.

6.09 Двохатомному газу надана кількість теплоти Q = 2,093 кДж. Газ розширюється при постійному тиску. Знайти роботу розширення газу.

6.10 Газ, що займає об’єм V = 5 л, знаходиться під тиском $p = 2\cdot10^5$ Па і при температурі t = 17°C, був нагрітий і розширився ізобарично. Робота розширення газу при цьому дорівнює A = 196 Дж. Знайти приріст температури газу.

6.11. Кількість ν = 1 кмоль багатоатомного газу нагрівається на ΔT = 100 K в умовах вільного розширення. Знайти кількість теплоти Q, надану газу, зміну ΔU його внутрішньої енергії і роботу A розширення газу.

6.12 Маса m = 10,5 г азоту ізотермічно розширяється при температурі t = -23°C, причому його тиск зміниться від p_1 = 250 кПа до p_2 = 100 кПа. Знайти роботу A, виконану газом при розширенні.

6.13 Кисень об'ємом V_1 = 7,5 л стискається адіабатично до об'єму V_2 = 1 л, причому в кінці стиснення встановився тиск $p_2 = 1{,}6\cdot10^6$ Па. Під яким тиском знаходився газ до стиснення?

6.14. Двохатомний газ, що розширяється при температурі 27°C і тиску в $2\cdot10^6$ Н/м^2 стискається адіабатично від об'єму V_1 до об'єму V_2 = $0{,}5V_1$. Знайти температуру і тиск газу після стиснення.

6.15. Кількість ν = 1 кмоль азоту, що знаходиться за нормальних умов, розширяється адіабатично від об'єму V_1 до об'єму $V_2 = 5V_1$. Знайти: 1) зміна внутрішньої енергії газу ΔW, 2) роботу A, виконану газом при розширенні.

6.16. Газ розширяється адіабатично і при цьому його об'єм збільшується удвічі, а абсолютна температура падає в 1,32 рази. Яке число ступенів вільності мають молекули газу?

Контрольні запитання

1. Що називають внутрішньою енергією речовини?
2. Що таке внутрішня енергія ідеального газу?
3. Що називають теплоємністю речовини?
4. Що таке питома теплоємність речовини?
5. Що називається молярною теплоємністю речовини?
6. Який зв’язок існує між питомою і молярною теплоємностями речовині?
7. Який зв’язок існує між молярними теплоємностями при постійному об’ємі і при постійному тиску?
8. Який зв’язок існує між питомими теплоємностями при постійному об’ємі і при постійному тиску? Як визначити молярні теплоємності суміші газів?
9. Як визначити питомі теплоємності суміші газів
10. Як можна змінити внутрішню енергію термодинамічної системи?
11. Як визначається кількість теплоти, необхідної для нагрівання речовини заданої маси до певної температури?
12. Як визначається робота, яку здійснює газ при розширенні?

13 Сформулювати перший закон термодинаміки.
14 Пояснити фізичний зміст першого закону термодинаміки.
15 Який вигляд має перший закон термодинаміки застосовно до ізохоричного процесу?
16 Який вигляд має перший закон термодинаміки застосовно до ізобаричного процесу?
17 Чому дорівнює робота ідеального газу при ізобаричному розширенні?
18 Чому дорівнює робота ідеального газу при ізобаричному стисненні?
19 Який вигляд має перший закон термодинаміки застосовно до ізотермічного процесу?
20 Чому дорівнює робота ідеального газу при ізотермічному розширенні?
21 Чому дорівнює робота ідеального газу при ізотермічному стисненні?
22 Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії газу при ізотермічному процесі?
23 Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії газу при ізохоричному процесі?
24 Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії газу при ізобаричному процесі?
25 Чому для підвищення температури газу на одне і те значення при поснійному об'ємі і при постійному тиску потрібна різна кількість теплоти?
26
27 Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії газу при складному процесі, який складається з кількох процесів?
28 Який процес називається адіабатичним?
29 Що являє собою показник ступеню адіабати, які значення він може приймати?
30 Який вигляд має рівняння адіабати, що описує зв'язок між параметрами p і V?
31 Який вигляд має рівняння адіабати, що описує зв'язок між параметрами p і T?
32 Який вигляд має рівняння адіабати, що описує зв'язок між параметрами V і T?
33 Як виглядає перший закон термодинаміки для адіабатичного процесу? Пояснити його фізичний зміст.
34 Як визначити роботу, яку здійснює газ при адіабатичному процесі?
35 В якому із ізопроцесів робота газу максимальна?

2.4 Другий закон термодинаміки.

Короткі теоретичні відомості і основні формули

За один цикл робоче тіло отримує від нагрівача деяку кількість теплоти Q_1, виконує роботу А і віддає холодильнику кількість теплоти Q_2.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) циклу визначається відношенням виконаної роботи до підведеної до робочого тіла теплоти за один цикл:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}.$$

Коефіцієнт корисної дії циклу Карно, з ідеальним газом в якості робочого тіла, залежить тільки від температур нагрівача та холодильника.

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Ентропією термодинамічної системи - це така однозначна функція параметрів термодинамічної рівноважної системи, зміна якої дорівнює сумі зведених кількостей теплоти у відповідному рівноважному процесі:

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = S_2 - S_1 = \Delta S.$$

Ентропія - скалярна величина, введена через різницю, тому обчислюється з точністю до довільної константи.

Розмірність ентропії

$$[S] = \frac{Дж}{К}.$$

В ізотермічних процесах, наприклад танення льоду та випаровування води при кипінні ентропія відповідно дорівнює:

$$\Delta S_1 = \frac{\lambda m}{T_0}, \lambda = 0{,}33\frac{мДж}{кг}, T_0 = 273К;.$$

$$\Delta S_2 = \frac{rm}{T_к},\ r = 2{,}3\frac{мДж}{кг}, T_к = 373К.$$

В процесах нагрівання ентропія зростає, в процесах охолодження – спадає.

Методичні вказівки і приклади розв'язування задач на застосування другого закону термодинаміки

По даній темі розглядаються процеси, які пов'язані із зворотним циклом Карно, і задачі на розрахунок зміни ентропії. В задачах на розрахунок зміни ентропії використовуються найважливіші властивості ентропії: 1) ентропія є функцією стану; 2)ентропія складної системи дорівнює сумі ентропій її частин.

Розраховуючи зміну ентропії треба пам'ятати, що тут dQ означає кількість теплоти, що одержує тіло. Тому, якщо тіло віддає тепло, то величину dQ треба брати із знаком «-».

Приклад 7.1. Ідеальна теплова машина, що працює за циклом Карно, отримує за кожний цикл від нагрівача 25,2 кДж тепла. Температура нагрівача 400 К, температура холодильника 300 К. Визначити роботу, що виконує машина за один цикл та кількість теплоти, що віддається холодильнику за один цикл.

Розв'язання. Використаємо формулу коефіцієнта корисної дії циклу Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{\grave{O}_1 - \grave{O}_2}{\grave{O}_1}. \qquad (7.1)$$

Підставляючи чисельні значення величин, отримаємо:

$$\eta = \frac{400 - 300}{400} = 0{,}25.$$

Робота, що виконується за один цикл:

$$A = \eta Q_1 = 0{,}25 \cdot 25{,}2 = 6{,}3(кДж).$$

Кількість теплоти, що віддана холодильнику визначається із формули:

$$A = Q_1 - |Q_2|.$$

$$Q_2 = Q_1 - A.$$

Знайдемо числове значення:

$$Q_2 = 25{,}2 - 6{,}3 = 18{,}9(кДж).$$

Відповідь: A=6,3 кДж; Q_2=18,9 Дж.

Приклад 7.2. . Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. При цьому 80% теплоти, що отримує робоче тіло від нагрівача, передається холодильнику. Кількість тепла, що отримує робоче тіло від нагрівача, дорівнює Q_1 = 6,3 кДж. Визначити: 1) ККД циклу 2) роботу, що виконує машина за один цикл.

Розв'язання. Розв'язок задачі базується на використанні коефіцієнта корисної дії циклу Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{Q_1 - 0{,}8Q_1}{Q_1} = 0{,}2.$$

З цього рівняння слідує також, що робота, яка виконується за один цикл дорівнює:

$$A = \eta Q_1 = 0{,}2 \cdot 6{,}3 = 1{,}26(кДж).$$

Відповідь: η=20%; A=1,26 кДж.

Приклад 7.3. Визначити зміну ентропії, що відбувається при змішуванні 2 кг води, що перебуває при температурі 300 К, і 4 кг води при температурі 370 К.

Розв'язання. Визначимо температуру після змішування холодної і гарячої води.

Кількість теплоти. необхідної для нагрівання води масою m_1 до температури θ суміші, дорівнює

$$Q_1 = c \cdot m_1(\theta - T_1).$$

Кількість теплоти, що виділилася при охолодженні гарячої води до температури суміші θ:

$$Q_2 = c \cdot m_2(T_1 - \theta).$$

Складемо рівняння теплового балансу :

$$c \cdot m_1(\theta - T_2) = c \cdot m_2(T_2 - \theta).$$

Виразимо температуру суміші:

$$m_1\theta - m_1T_2 = m_2T_1 - m_2\theta,$$

$$\theta = \frac{m_2T_1 - m_1T_2}{m_1 + m_2}.$$

Виконаємо обчислення:

$$\theta = \frac{4\cdot 340 - 2\cdot 300}{4+2} = 347K.$$

Зміна ентропії при охолодженні води масою m_1 дорівнює

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{\theta}\frac{dQ_1}{T} = \int_{T_1}^{\theta}\frac{cm_1dT}{T} = cm_1\ln\frac{\theta}{T_1}.$$

Зміна ентропії при охолодженні води масою m_2 дорівнює

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{\theta}\frac{dQ_2}{T} = \int_{T_2}^{\theta}\frac{cm_2dT}{T} = cm_2\ln\frac{\theta}{T_2}.$$

Зміна ентропії системи дорівнює

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = c\left(m_1\ln\frac{\theta}{T_1} + m_2\ln\frac{\theta}{T_2}\right)$$

Виконаємо обчислення:

$$\Delta S = 4200\left(2\ln\frac{347}{300} + 4\ln\frac{347}{370}\right) = 4200\left(2\cdot 0{,}147 + 4\cdot(-0{,}064)\right) =$$
$$= 4200\,(0{,}294 - 0{,}256) = 159{,}6\,(Дж/К)$$

Відповідь: ΔS=159,6 Дж/К.

Задачі для закріплення теорії і навичок їх розв’язання.

7.01. Ідеальна теплова машина, що працює за циклом Карно, одержує за кожний цикл від нагрівача Q_1 = 2,512 кДж. Температура нагрівача 400 К, температура холодильника 300 К. Знайти роботу А, яку виконується машиною за один цикл, і кількість теплоти Q_2, що віддається холодильнику за один цикл.

7.02. Ідеальна теплова машина, що працює за циклом Карно, виконує за один цикл роботу A = 73,5 кДж. Температура нагрівача t_1 = 100°C, температура холодильника t_2 = 0°C. Знайти: ККД η циклу, кількість теплоти Q_2, що віддається за один цикл холодильнику

7.03. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно і одержує від нагрівача Q_1 = 6,28 кДж.. При цьому холодильнику передається 80% теплоти, яку вона одержує від нагрівача,. Знайти: 1) ККД η циклу, 2) роботу A, виконану при повному циклі.

7.04. Ідеальна холодильна машина, що працює по зворотному циклу Карно, виконує за один цикл роботу A = 37 кДж. При цьому вона бере тепло від тіла з температурою t_2 = -10°C і передає тепло тілу з температурою t_1 = +17°C. Знайти: 1)ККД η прямого циклу; 2) кількість теплоти Q_2, що віднімається від холодного тіла за один цикл; 3) кількість теплоти Q_1,що передається гарячому тілу за один цикл.

7.05 Визначити роботу A_2 ізотермічного стискування газу, здійснену в циклі Карно, ККД якого η=0,4, якщо робота ізотермічного розширення дорівнює A_1=8 Дж.

7.06 Газ, виконуючи цикл Карно, віддав охолоджувачу теплоту Q_2 = 14 кДж. Визначити температуру T1 нагрівача, якщо при температурі охолоджувача T_2=280 К робота циклу A=6 кДж.

7.07 Газ, що є робочою речовиною в циклі Карно, одержав від нагрівача теплоту Q1=4,38 кДж і виконав роботу A=2,4 кДж. Визначити температуру нагрівача, якщо температура охолоджувача T_2=273 К.

7.08 Газ, виконуючи цикл Карно, віддав холодильнику 67% теплоти, отриманої від нагрівача. Визначити температуру T_2холодильника, якщо температура нагрівача T_1=430 К.

7.09 У скільки разів збільшиться коефіцієнт корисної дії η циклу Карно при підвищенні температури нагрівача від 380 К до 560 К, якщо температура холодильника 300 К?

7.10 Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. Температура T_1 нагрівача дорівнює 500 К, температура охолоджувача T_2=250 К. Визначити термічний ККД циклу η, а також роботу A_1, виконану робочою речовиною при ізотермічному розширенні, якщо при ізотермічному стиску виконана робота A_2=70 Дж.

7.11 Газ, здійснюючи цикл Карно, одержує теплоту Q_1=84 кДж. Яку роботу A виконав газ, якщо температура T_1 нагрівача в три рази вища за температуру T_2 охолоджувача?

7.12 При прямому циклі Карно теплова машина виконує роботу 1000 Дж. Температура нагрівача 500 К, температура холодильника 300 К. Визначити кількість теплоти, яку одержує теплова машина від нагрівача.

7.13 Виконуючи цикл Карно, газ одержав від нагрівача теплоту Q_1=500 Дж і виконав роботу A=100 Дж. Температура нагрівача T_1=400 К. Визначити температуру T_2 холодильника.

7.14 Знайти зміну ентропії при переході льоду масою 1.0 кг в воду при температурі 60^0 С.

7.15 Обчислити зміну ентропії, якщо повітря масою 3 г переходить від об'єму 2л при тиску $3*10^5$ Па до об'єму 6 л при тиску 10^5 Па.

7.16 Кисень масою 200 г нагрівають від 27^0 С до 127^0 С.Знайти зміну ентропії, якщо відомо, що початковий і кінцевий тиски однакові і близькі до атмосферного.

Контрольні запитання.

1 Які процеси називають оборотними?
2 Які процеси називають необоротними?
3 Що таке коловий процес?
4 Як виглядають цикли теплових двигунів і холодильних машин?
5 Як визначається робота, яка виконується газом за цикл?
6 Який цикл називається прямим?
7 Що таке тепловий двигун? З яких частин він складається?
8 За рахунок чого виконується робота теплового двигуна?
9 Як визначити КПД теплової машини?
10 Що являє собою цикл Карно?
11 Що таке ідеальна теплова машина?
12 Як визначити КПД циклу Карно?
13 Від чого залежить КПД циклу Карно?
14 Який процес називається зворотним?
15 На чому базується принцип роботи холодильної машини?
16 Як визначається холодильний коефіцієнт?
17 Що встановлює другий закон термодинаміки?
18 Як формулюється другий закон термодинаміки?
19 Що таке зведена кількість теплоти?
20 Пояснити, що називається ентропією?
21 Чому дорівнює зміна ентропії при переході газу з одного стану в інший?
22 Чому дорівнює зміна ентропії при переході речовини з одного агрегатного стану в інший?
23 В чому полягає принцип зростання ентропії?
24 Що таке термодинамічна ймовірність стану?
25 В чому полягає статистичний зміст другого закону термодинаміки?

Список рекомендованої літератури

1 **Трофимова, Т. И.** Курс физики / Т. И. Трофимова. - М: Высш. шк., 2003. - 541с. - ISBN 5-06-003634-0.

1 **Савельев, И. В.** Курс общей физики / И.В. Савельев. - Т. 1. - М.,1982. - 432 с.; Т. 2. - М., 1982. - 496 с..

2 **Детлаф, А. А.** Курс физики : учеб. пособие для студ. втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. - 2.изд., испр. и доп. - М. : Висшая школа, 1999. - 718с. : ил. - ISBN 5-06-003556-5.

3 **Бушок, Г. Ф.** Курс фізики / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовский, Г.Ф.Півень. – К. : Либідь, 2001. – Кн. 1. – 448с. – ISBN 966-060084-4.

4 **Бушок, Г. Ф.** Курс фізики / Г. Ф. Бушок, Е. Ф. Венгер. – К. : Либідь, 2001. – Кн. 2. – 424 с. – ISBN 960-06-0029-1.

5 **Волькенштейн, В. С.** Зборник задач по общему курсу физики : для студ. техн. вузов / В. С. Волькенштейн. - Изд. доп. и перераб. - Спб. : Специальная литература ; Лань, 1999. - 328с. - ISBN 5-8114-0199-X.

6 **Волькенштейн, В. С.** Зборник задач по общему курсу физики : для студ. техн. вузов / В. С. Волькенштейн. - 3-е изд., испр. и доп. - Спб. : Книжний мир, 2003. - 327с. - ISBN 5-86457-2357-7.

7 **Чертов, А. Г.** Задачник по физике : учеб. пособие для студ. втузов / А. Г. Чертов. – 6-е изд., испр. – М. : Прес-прес-інтеграл-прес, 1997. – 544с. – ISBN 5-89602-001-5.

8 **Фирганг, Е. В.** Руковадство к решению задач по общему курсу физики / Е. В. Фирганг. - М. : Высш. шк., 1977. - 357 с.

9 **Яворский, Б. М.** Справочник по физике / Б. М. Яворский. – М., 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014508-4.

10 Електронний конспект лекцій з дисципліни "Фізика" Розділ "МЕХАНІКА" /Сайт кафедри фізики. Лекції Тишкевича А.В. - Краматорск: ДДМА, 2006.-38 с

Додаток А

ТАБЛИЦІ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

Таблиця А.1 - Основні фізичні постійні

Фізичні постійні	Позначення	Значення
Норрисьне прискорення вільного падіння	g	9,81 м/с^2
Гравітаційна постійна	**G**	$6{,}67\cdot10^{-11}$м^3/(кг·з^2)
Постійна Авогадро	N_A	$6{,}02\cdot10^{23}$моль$^{-1}$
Молярна газова постійна	R	8,31 Дж/(моль·К)
Постійна Больцмана	k	$1{,}38\cdot10^{-23}$Дж/К
Елементарний заряд	e	$1{,}60\cdot10^{-19}$Кл
Швидкість світла у вакуумі	c	$3{,}00\cdot10^{8}$м/с
Постійна Стефана – Больцмана	σ	$5{,}67\cdot10^{-8}$Вт/(м^2·К^4)
Постійна Віна	b	$2{,}90\cdot10^{-3}$м·К
Постійна Планка	h	$6{,}63\cdot10^{-34}$Дж·з
	$\hbar$	$1{,}05\cdot10^{-34}$Дж·з
Постійна Ридберга	R	$1{,}10\cdot10^{7}$м
Радіус Бора	a_o	$0{,}529\cdot10^{-10}$м
Комптонівська довжина хвилі	λ_c	$2{,}43\cdot10^{-12}$м
Магнетон Бора	μ_B	$9{,}27\cdot10^{-24}$Дж/Тл
Енергія іонізації атома водню	E_i	$2{,}18\cdot10^{-18}$Дж (13,6 еВ)
Атомна одиниця маси	а. е.м.	$1{,}660\cdot10^{-27}$кг
Електрична постійна	ε_o	$8{,}85\cdot10^{-12}$Ф/м
Магнітна постійна	μ_o	$4\pi\cdot10^{-7}$Гн/м

Таблиця А.2 - Деякі астрономічні величини

Найменування	Значення
Радіус Землі	$6{,}37 \cdot 10^{6}$ м
Маса Землі	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радіус Сонця	$6{,}95.\cdot 10^{8}$ м
Маса Сонця	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг
Радіус Місяця	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ м
Маса Місяця	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг
Відстань від центру Землі до центру Сонця	$1{,}49 \cdot 10^{11}$м
Відстань від центра Землі до центра Місяця	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ м

Таблиця А.3 - Густина твердих тіл

Тверде тіло	Густоту, кг/м^3	Тверде тіло	Густоту, кг/м^3
Алюміній	$2{,}70 \cdot 10^{3}$	Мідь	$8{,}93 \cdot 10^{3}$
Барій	$3{,}50 \cdot 10^{3}$	Нікель	$8{,}90 \cdot 10^{3}$
Ванадій	$6{,}02 \cdot 10^{3}$	Свинець	$11{,}3 \cdot 10^{3}$
Вісмут	$9{,}80 \cdot 10^{3}$	Срібло	$10{,}5 \cdot 10^{3}$
Залізо	$7{,}88 \cdot 10^{3}$	Цезій	$1{,}90 \cdot 10^{3}$
Літій	$0{,}53 \cdot 10^{3}$	Цинк	$7{,}15 \cdot 10^{3}$

Таблиця А.4 - Густина рідин

Рідина	Густоту, кг/м^3	Рідина	Густоту, кг/м^3
Вода (при 4°С)	$1{,}00 \cdot 10^{3}$	Сірковуглець	$1{,}26 \cdot 10^{3}$
Гліцерин	$1{,}26 \cdot 10^{3}$	Спирт	$0{,}80 \cdot 10^{3}$
Ртуть	$13{,}6 \cdot 10^{3}$	Масло	$0{,}9 \cdot 10^{3}$

Таблиця А.5 - Густина газів (при нормальних умовах)

Газ	Густоту, кг/м^3	**Газ**	Густоту, кг/м^3
Водень	0,09	Гелій	0,18
Повітря	1,29	Кисень	1,43

Таблиця А.6 - Коефіцієнт поверхневого натягу рідин

Рідина	Коефіцієнт, мН/м	Рідина	Коефіцієнт, мН/м
Вода	72	Ртуть	500
Мильна піна	40	Спирт	22

Таблиця А.7 - Ефективний діаметр молекули

Газ	Діаметр, м	Газ	Діаметр, м
Азот	$3{,}8\cdot10^{-10}$	Водень	$2{,}3\cdot10^{-10}$
Аргон	$3{,}5\cdot 10^{-10}$	Гелій	$1{,}9\cdot10^{-10}$
Повітря	$2{,}8\cdot 10^{-10}$	Кисень	$2{,}7\cdot10^{-10}$

Навчальне видання

СОЛОМІНА Вікторія Федорівна
ТИШКЕВИЧ Анатолій Володимирович

Посібник до практичних занять та самостійної роботи студентів з дисципліни «Фізика»
Розділи: Механіка,молекулярна фізика і термодинаміка.

Редактор О.О.Дудченко

Комп'ютерна верстка О.П.Ордіна

223/2007 Підп. до друку Формат 60х84/16
Папір офсетний. Ум. друк.арк . Обл.-вид.арк. .
Тираж прим. Зам.№

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.2003